
طرق عددية

فهرسة أثناء النشر إعداد إدارة الشئون الفنية - دار الكتب المصرية

عوين، علي محمد

طرق عددية/ تأليف: أ.د: علي محمد عوين

رقم الإيداع:

ردمك: 978-9959-55-058-3 ISBN

ط1 - القاهرة: المجموعة العربية للتدريب والنشر



الناشر

المجموعة العربية للتدريب والنشر

8 أ شارع أحمد فخري - مدينة نصر - القاهرة - مصر

تليفاكس: 22759945 - 22739110 (00202)

www.arabgroup.net.eg

elarabgroup@yahoo.com

طــرق عدديــة

تأليف
أ. د. علي محمد عويــن
أستاذ شرف
قسم الرياضيات جامعة الفاتح
قسم العلوم الرياضية أكاديمية دراسات العليا

بسم اللـه الرحمن الرحيم

﴿ ليعلم أن قد أبلغوا رسالات ربهم وأحاط بما لديهم وأحصى كل شيء عددا ﴾

صدق اللـه العظيم

(سورة الجن: 28)

الإهداء

إلى اللذين قال فيهم رسول الـلـه (ﷺ) : "لغذوه في سبيل العلم خير من مائة غزوة"......إلى اللذين يطلبون العلم في سبيل الـلـه .

في هذا الكتاب

يأتي هذا الكتاب تلبية للحاجة الكبيرة والمستديمة لطلاب العلوم الطبيعية والعلوم الهندسية بمختلف المراحل. فالتحليل العددي (أو الطرق العددية) له أهمية خاصة وكبيرة بمختلف المجالات المذكورة. ويأتي هذا الكتاب كتنقيح وامتداد لأعمال قمت بنشرها في السابق في هذا المضمار.

في البداية نعطي تقديما مقتضبا حول أهمية التحليل العددي والعمليات الحسابية والأخطاء وتحليلها ؛ ثم نتنقل إلى دراسة الحسبان الفرقي ومختلف المؤثرات الفرقية. بعد ذلك ندرس الاستكمال والتفاضل والتكامل العددي؛ ثم نتجه إلى دراسة حلول المعادلات الجبرية وغير الجبرية وحلول المعادلات الآنية الخطية وغير الخطية.

أما الجزء الأهم في هذا الكتاب فهو يكمن في دراسة الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية والجزئية وفي الملائمة بواسطة المربعات الصغرى ومسائل القيم الذاتية.

هذا كما نخصص الفصل الأخير لإعطاء فكرة سريعة عن بعض المواضيع المهمة مثل طريقة العناصر المحدودة وإضافات حول تربيعات جاوس للتكامل وبعض التوزيعات الإحصائية.

ونود أن نشير هنا إلى أن هذا الكتاب تميز بالوضوح والسلاسة ووفرة الإيضاحات وخصوصاً في مجال التطبيقات الحاسوبية فلقد اشتمل الكتاب على عدد كبير جدا من الأمثلة المكتوبة بمختلف لغات الحاسوب من فورتران 90 إلى لغة C وباسكال ودلفي وبيسك المرئية وبيسك العادية والسريعة ، وهي إما من كتابة المؤلف أو من قبل طلاب الدراسات العليا بالأكاديمية والتي كانت معطاة لهم كواجبات بيتية عند تدريس المقرر لهم. وهذا بالطبع يعكس ترجمة عملية لتنفيذ هذا الكتاب كمقرر لطلاب العلوم

الطبيعية والهندسية. لابد لي هنا أن أشكر كل الطلاب الذين استعنت بأحد برامجهم في هذا الكتاب.

هذا و يصلح هذا الكتاب للاستعمال كمقرر لطلاب الدراسات الجامعية في المراحل الأخيرة حيث يتم الاكتفاء بتدريس الست فصول الأولى، وكمقرر لطلاب الدراسات العليا بأقسام الفيزياء والرياضيات والعلوم الهندسية وحيث يتم عندئذ تنفيذ الكتاب بأكمله .

أرجو من اللـه العلي القدير أن أكون قد وفقت في أن يكون هذا الكتاب إضافة جديدة و جيدة لمكتبتنا العربية العلمية.

أ.د. علي محمد عوين
طرابلس - 22/3/ 2007

الفصل الأول

مقدمة

يحتوي هذا الفصل على:

1.1 ما هو التحليل العددي؟

للوهلة الأولى وعندما نسمع كلمة «التحليل العددي» ، نعتقد بأنه ذلك المجال الذي نلجأ إليه عندما نعجز عن حل المسألة الفيزيائية أو الهندسية، أو أي مسألة بمجال تطبيقي، حلا رياضياً أو تحليليا. ولكن الواقع أن مجال التحليل العددي هو أكبر وأوسع من كل ذلك فالتحليل العددي ((**يشمل تطوير وتقييم الطرق المستخدمة لحساب نتائج عددية ما من معلومات عددية معطاة**))، وهذا الجانب من العمليات هو ما يسمى بمعالجة المعلومات.

والتطوير يعني وجود طرق سابقة والمطلوب أن يتم تطويرها حسب ما يواجهنا من تقدم علمي وحسب ما يواجهنا من مشاكل في حياتنا العملية. والتقنية التي شهدها ومازال يشهدها مجال الحاسوب خير مثال نعطيه هنا. أما التقييم فنعني به مدى دقة الطريقة العددية المستعملة وكفاءتها من حيث سرعتها ومتطلباتها.

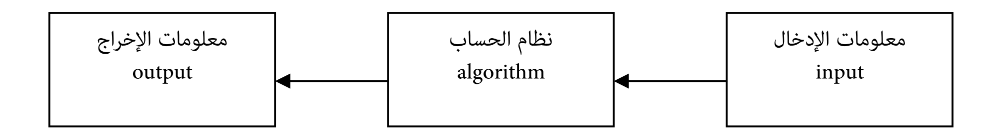
وتعريف التحليل العددي على النحو الذي سقناه يوضح بجلاء أن العلوم والتقنية التي نجني ثمارها اليوم ما هي إلاّ تراكمات عبر القرون والسنين لبني البشر في كل بقاع الكرة الأرضية.

ولتوضيح التعريف السابق ببعض الشيء نفترض أن أحدهم هو أستاذ بمدرسة ثانوية لفصل به ثلاثون تلميذاً، وأراد أن يحسب متوسط الفصل والدرجات القصوى (كبرى وصغرى) لتلاميذه ؛ عندئذ تكون المعلومات العددية المعطاة هي عدد الطلاب ودرجاتهم في الفترات المختلفة ودرجات الامتحانات القصيرة والواجبات البيتية المسندة لهم ودرجات الامتحان النهائي؛ والنتائج المراد الحصول عليها هي: متوسط

درجات التلاميذ في الفصل والدرجات القصوى وتحديد التراتيب الأولى بين التلاميذ. وفي ذلكم يقوم الأستاذ باستعمال طريقة معينة للحساب وربما لزم الأمر استعمال أكثر من طريقة ومن ثم اختيار الطريقة الأفضل والأدق من بين كل الطرق المتاحة.

هذا وتسمى المعلومات المعطاة بمعلومات الإدخال (عدد الطلاب والدرجات بالمثال السابق)، بينما تسمى النتائج المطلوبة بمعلومات الإخراج (المتوسط والتراتيب بالمثال السابق). أما الطريقة التي تتم بها الحسابات فتسمى بنظام الحساب (أو العد)؛ وباللغة الإنجليزية نظام الحساب هو (Algorithm) وهي كلمة مستخرجة من اسم العالم العربي الإسلامي "الخوارزمي". ولقد وردت هذه الكلمة في مخطوطات غربية قديمة مع أوائل عصر النهضة بأوروبا وفي مراسلات بين علماء تلك الحقبة.

وهكذا تمر العملية الحسابية أو العددية بثلاث مراحل نوضحها كما بالشكل (1.1).

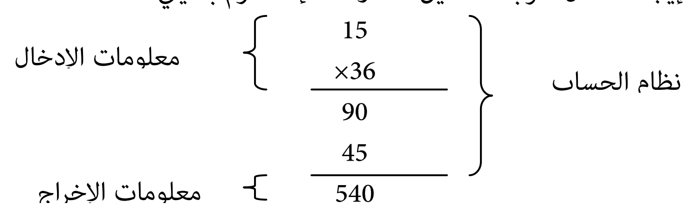


الشكل (1.1) المراحل الثلاثة التي تشملها معالجة المعلومات

والمثال الموالي يوضح المراحل الثلاثة التي تمر بها معالجة المعلومات:

مثال (1.1)

لو أردنا إيجاد حاصل ضرب العددين 15 و 36 فإننا نقوم بما يلي:



معلومات الإدخال هنا هي العددان 15 و 36، ومعلومات الإخراج هي العدد 540؛ والعملية التي قمنا بها من ضرب هي نظام الحساب.

واختيار نظام الحساب مهم للغاية، وعلينا أن نقوم دائما باختيار الأحسن عند معالجة مسألة ما.

وبالأحسن نعني أن نختار الأسرع والأدق. والتركيز على الدقة بدوره ينبهنا إلى وجود الأخطاء.

ومصادر الأخطاء عديدة وتتلخص في الأخطاء الناتجة عن:

(أ) أخطاء الإدخال.
(ب) أخطاء نظام الحساب.
(ج) أخطاء الإخراج.

وأخطاء الإدخال يمكن أن تنتج عن عامل شخصي أو إنساني حيث يتم التعامل

مع البيانات بإهمال أو يحدث خطأ غير مقصود عند نقل البيانات أو تخزينها، وربما تنتج أيضا عن عامل أو سبب آلي كأن يكون جهاز القراءة غير دقيق كالأجهزة المستخدمة في مجالات العلوم التطبيقية، فهي مهما كانت دقيقة لن تكون ذات دقة كافية. فعندما يعطي الجهاز قراءة لكمية ما مثل الكثافة أو الكتلة أو التردد.... إلخ فلا بد وأن تكون هناك نسبة خطأ في تلك القراءة.

أمّا عن الأخطاء في نظام الحساب فإننا نعطي المثال التالي لنوضح أهمية اختيار نظام الحساب، وهو مثال على سبيل الذكر لا الحصر.

مثال (2.1):

المطلوب إيجاد أصغر جذري المعادلة $x^2 - 20x + 1 = 0$.

الحل:

حيث أن الجذرين هما $10 \pm \sqrt{99}$؛ وحيث نصل إلى ذلك بسهولة باستعمال القانون العام لإيجاد جذور المعادلة التربيعية في x .

الآن، لو استعملنا ثلاثة أرقام لكل عدد في حساباتنا فإن أصغر الجذرين هو:

$$10 - \sqrt{99} = 10.0 - 09.9 = 0.10$$

ولكن لو استعملنا طريقة أخرى، غير الطريقة المباشرة السابقة، أي أنه لو استخدمنا نظام حساب ثان وذلك بالضرب في المرافق فإن:

$$10-\sqrt{99}=\frac{\left(10+\sqrt{99}\right)\left(10-\sqrt{99}\right)}{\left(10+\sqrt{99}\right)}=\frac{1}{\left(10+\sqrt{99}\right)}=\frac{1}{19.9}\cong 0.05$$

ومن النتيجتين السابقتين نرى الفارق الكبير الذي أنتجه استعمال نظامين للحساب (الأول أعطى ضعف ما أعطاه الثاني). أي أن أنظمة مختلفة للحساب تعطي نتائج مختلفة.

من هذا المنطلق كان لزاما علينا أن نستخدم نظريات مدعمة لحساباتنا حتى تكون نتائجنا صحيحة.و هذا هو بالضبط ما يقوم به التحليل العددي.

وفي جميع الحالات يجب أن نتذكر ما يلي:

أولاً: لا يمكن بأي حال من الأحوال أن يمثل نموذج رياضي حالة طبيعية مركبة تماماً؛ أي أن النموذج الرياضي الذي يمثل الحالة الطبيعية – أو الفيزيائية- ما هو إلاّ تقريب لتلك الحالة.

ثانياً: لا توجد طريقة عددية تخلو تماماً من المشاكل في كل الحالات.

ثالثاً: لا توجد طريقة عددية تخلو تماماً من الأخطاء.

رابعاً: لا توجد طريقة عددية يكون فيها الخطأ أقل ما يمكن في كل الحالات.

ننوه هنا بأن الحسابات تتم باستعمال الحاسوب ولذلك تستخدم لغات مثل سي (C) وفورتران وباسكال وبيسك و ...... إلخ. وعند كتابة البرامج والحصول على نتائج يجب التحقق من صحتها.

2.1 الأخطاء ومسبباتها

في المعتاد تقع الأخطاء بالحواسيب؛ غير أن هذه تكون ناتجة في العادة عن المستعمل. ولكي يتم التحقق من صحة النتائج وعدم وجود أخطاء يفضل أن تجري عملية حسابية يدوية و لو لمرة واحدة. إضافة إلى ما تقدم، غالباً ما تتخلل الأخطاء الحسابات العددية. وحتى نتمكن من فهم الأخطاء ووقوعها، علينا أن نعلم مصدرها وانتشارها ومقدارها (أو قيمتها).

وقبل أن نخوض في ذلك دعنا نعطي بعض التعريفات البسيطة:

الخطأ المطلق

ويعرف على أنه:

الخطأ في متغير a= القيمة المحسوبة (A) – القيمة الحقيقية (a) = A-a

(ونقصد بذلك الفرق بين القيمة المحسوبة A والقيمة الفعلية(أو المتوقعة) للمتغير a).

الخطأ النسبي = الخطأ المطلق ÷ القيمة الحقيقية = $\frac{A-a}{a}$

الخطأ المئوي = الخطأ النسبي × 100 = $\left(\frac{A-a}{a}\right)\times 100$

مثال (3.1)

إذا كانت القيمة الحقيقية لمتغير a هي 5 وكانت القيمة المحسوبة هي 5.1 فأحسب الأخطاء المختلفة.

الحل:

لو رمزنا للخطأ المطلق في a بالرمز ε_a فإن :

$$\varepsilon_a = A - a = 5.1 - 5 = 0.1$$

ويكون الخطأ النسبي ε_{rel} هو:

$$\varepsilon_{rel} = \frac{\varepsilon_a}{a} = \frac{0.1}{5} = 0.02$$

والخطأ المئوي ε_{per} هو :

$$\varepsilon_{per} = 0.02 \times 100 = 2$$

1.2.1 مسببات الأخطاء الخطيرة بالحاسوب

عند استخدام الدقة المفردة نعتقد دائماً أننا نحصل على دقة في عدد معين من أرقام العدد (سبعة أو ثمانية)؛ ولكن في الحقيقية لا تتجاوز الدقة أرقام بسيطة من العدد وخصوصاً عندما نتحدث عن النتيجة النهائية. مثلاً لو كانت الإجابة المرتقبة هي 1.0 فلربما حصلنا على النتيجة 0.9993526 ويكون الخطأ عندئذ هو 0.0006474 وبذلك فإن الثلاثة أرقام الأولى هي الدقيقة ونقول بأن لدينا من الدقة ثلاثة أرقام أو أن: **ثلاثة أرقام هي ذات معنى**.

والمصدر الحقيقي للخطأ هو التقريب. يبد أنه من الأخطاءْ الممكنة (وهي أخطاء جدية أو خطيرة) بالحواسيب ما يلي:

1. خطأ التقريب الناتج عن جمع أو طرح عدد كبير وعدد صغير.
2. خطأ التقريب الناتج عن طرح عدديين متقاربين.
3. فيضان الأعداد أو انسيابها السفلي، أي أن يكون العدد الناتج عن الحسابات أصغر من الحد المسموح به بالحاسوب المستخدم، هنا يتم تجاهل مثل هذه الأعداد في كثير من الحالات ومساواتها بالصفر. نفس الشيء يحصل للانسياب الفوقى أو للأعداد الكبيرة جداً، أي تلك التي تفوق المدى المسموح به بالحاسوب.
4. القسمة على عدد صغير جداً.
5. التقريب أثناء عمليتي الضرب والقسمة البسيطتين، فمثلاً لو استخدمنا حواسيب تعمل بأربعة أرقام فقط للحصول على ناتج العملية:

$$3062 \times 5591=17119642$$

فإن الناتج يكتب على الصورة 0.1711×10^{8}، مثل هذه الحواسيب تستخدم في المفاعلات النووية وتجارب الفضاء.

6. الخطأ الكمي وهذا له علاقة بالتعبير عن الأعداد بالصيغة الثنائية.
7. خطأ الإخراج، فمثلاً لو استعملنا الشفرة F8.3 لإخراج العدد 0.01563 يكون الناتج المطبوع هو 0.016 أو 0.015 . وهذا بالطبع يعتمد على برمجة الحاسوب وما إذا قد برمج بحيث يسمح بالتقريب الذي درسناه في المراحل الأولى من تعليمنا.

2.2.1 انتشار الخطأ

لتتبع الخطأ وإيجاد الخطأ الكلي في النتيجة النهائية (أو في الإجابة النهائية) نقوم بدراسة انتشار الخطأ.

بداية دعونا نتعرض للموضوع من خلال دراسة العمليات البسيطة المختلفة من جمع وطرح وضرب وقسمة ثم نتطرق للموضوع في أنحاء متفرقة من هذا الكتاب كلما تقدمنا نحو دراسة عمليات أخرى مركبة.

ليكن لدينا العددان a و b وهما يمثلان القيمتين الصحيحتين (أو الفعليتين) لمتغيرين a و b في برنامجنا الحسابي، ولو افترضنا أن الخطأ المطلق فيهما هو ε_a و ε_b على التوالي فإن الخطأ ينتشر خلال العمليات الأربع كما يلي:

- الجمع: يكون الخطأ ε_{a+b} هو

$$\varepsilon_{a+b} = \varepsilon_a + \varepsilon_b \qquad ......(1.1)$$

- الطرح: يكون الخطأ ε_{a-b} هو

$$\varepsilon_{a-b} = \varepsilon_a - \varepsilon_b \qquad ......(1.2)$$

- الضرب: يكون الخطأ ε_{ab} هو

$$\varepsilon_{ab} = a\varepsilon_b + b\varepsilon_a \qquad ......(1.3)$$

- القسمة: يكون الخطأ $\varepsilon_{a/b}$ هو

$$\varepsilon_{a/b} = \frac{\varepsilon_a}{b} - a\frac{\varepsilon_b}{b^2} \qquad ...... (1.4)$$

والصيغ المعطاة أعلاه نوضحها كما يلي:

حيث أن : $\varepsilon_a = A - a$ و $\varepsilon_b = B - b$

فإنه في حالة الجمع والطرح نرى أن :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{a\pm b} &= (A \pm B) - (a \pm b)\\ &= (A - a) \pm (B - b)\\ &= \varepsilon_a \pm \varepsilon_b\end{aligned}$$

أما في حالة الضرب فإن :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ab} &= AB - ab\\ &= (a + \varepsilon_a)(b + \varepsilon_b) - ab\\ &= ab + (a\varepsilon_b + b\varepsilon_a) + \varepsilon_a\varepsilon_b - ab\\ &= a\varepsilon_b + b\varepsilon_a\end{aligned}$$

وحيث أهملنا الحد $\varepsilon_a\varepsilon_b$ لكونه حداً من الرتبة الثانية وهو صغير.

بالنسبة لعملية القسمة نرى أن :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{a/b} &= \frac{A}{B} - \frac{a}{b} = \frac{Ab - aB}{b(B)}\\ &= \frac{(a + \varepsilon_a)b - a(b + \varepsilon_b)}{b(b + \varepsilon_b)}\\ &= \frac{ab + b\varepsilon_a + -ab + a\varepsilon_b}{b^2}\end{aligned}$$

وحيث أهملنا ε_b في المقام لصغره مقارنة بـ b عليه فإن :

$$\varepsilon_{a/b} = \frac{b\varepsilon_a - a\varepsilon_b}{b^2} = \frac{\varepsilon_a}{b} - \frac{a\varepsilon_b}{b^2}$$

3.1 متسلسلة تايلور

تمثل متسلسلة تايلور حجر الأساس(أو حجر الزاوية) للطرق العددية، فهي التي توجد الأساليب العددية وتكونها كما تقوم بتقدير الخطأ.

لو سلطنا اهتمامنا على نقطة x قرب a فإنه من المعلوم بأن متسلسلة تايلور للدالة f عند x هي :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + ... \qquad ......(1.5)$$

وبحيث تكون الدالة f مستمرة وقابلة للتفاضل على فترة ما تحوى النقطة a. ولو كان بالإمكان الحصول على المفكوك (1.5) المذكور أعلاه فإنه يقال بأن f تحليلية بالمنطقة قرب $x = a$. وإذا حدث وأن كانت العلاقة (1.5) محققة لكل x بحيث $|x-a| = R$ فإن R تدعى بنصف قطر التقارب.

وتجدر الإشارة هنا إلى أنه لو كانت $a = 0$ فإن المفكوك الناتج عندئذ يسمى بمفكوك، أو متسلسلة ماكلورين أي أن متسلسلة ماكلورين للدالة f هي:

$$f(x) = f(0) + \frac{xf'(0)}{1!} + \frac{x^2 f''(0)}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a) + ... \qquad ......(1.6)$$

الآن لو أخذنا عددا كافياً من الحدود من (1.5) أو (1.6) [حسب الحالة

المدروسة] فإنه يمكن أن نجد قيمة تقريبية $f(b)$ للدالة f عند النقطة b؛ وحيث b هي نقطة داخل دائرة التقارب.

والسؤال الذي يطرح نفسه هنا هو :

كيف يتم بتر (أو قطع) متسلسلة تايلور؟

للإجابة! نرى أنه إذا أهملنا حدوداً من الرتبة $(x-a)^n$ وأعلى رتبة فإن الخطأ يكون من الرتبة $(x-a)^n$ ونكتبه: من الرتبة $0(x-a)^n$. وانطلاقا مما تقدم نستطيع كتابة $f(x)$ على الصورة :

$$f(x)= f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+.... + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a)+0(x-a)^n \quad ...... (1.7)$$

ونلاحظ من (1.7) أن: $0(x-a)^{n+1} < 0(x-a)^n$

مثال (4.1)

لو أن $f(x)=\sin x$ وأخذنا في الاعتبار متسلسلة ماكلورين فإن $f'(x)=\cos x$ و $f''(x) = \sin x$ و $f'''(x)=-\cos x$ و .....إلخ

كما أن :

$$\sin x = \sin(0)+x\cos(0)+\frac{x^2}{2!}\sin(0)-\frac{x^3}{3!}\cos(0)+....$$
$$= x-\frac{x^3}{3!}+..... = x-\frac{x^3}{3!}+0(x^4)= x-\frac{x^3}{3!}+0(x^5)$$

(وذلك لأن الحد المحتوى على x^4 يساوي الصفر)

مثال (5.1)

احسب $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ حتى $0\left(\frac{\pi}{6}\right)^5$

الحل:

من المثال السابق نرى أن :

$$\sin(0.1) = \left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\left(\pi/6\right)^3}{3!} + 0\left(\pi/6\right)^5$$
$$= 0.4996752 + 0\left(\pi/6\right)^5 = 0.4996752$$

(قارن بالقيمة الفعلية لـ $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$)

نلاحظ أنه عند حساب المتسلسلات للدوال المثلثية يتم التعويض عن x بالزوايا (النقية (rad)؛ لذلك كل ما يتعلق بها من حسابات ببقية مواضيع التحليل العددي يجب الاعتداد بقيم الزوايا محسوبة بالنقية (rad) أي بالزوايا نصف قطرية؛ فعلى سبيل المثال الزاوية هنا هي $\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5236$ وليست 30^o .

مثال (6.1)

احسب $e^{0.5}$ إلى $0\left(0.5\right)^3$

الحل:

حيث أن $f\left(x\right) = e^x$ وأن $f^{(n)}\left(x\right) = e^x$ لكل $n = 1,2,......$ وباستخدام متسلسلة تايلور حول $a = 0$ نرى أن:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + 0(x)^3$$

وبذلك فإن :

$$e^{0.5} = 1 + 0.5 + \frac{(0.5)^2}{2!} + 0(0.5)^3$$

(قارن بقيمة $e^{0.5}$ الفعلية)

مثال (7.1)

احسب قيمة $\frac{1}{1-x}$ حتى $0\left(x^4\right)$ وذلك عندما $x = 0.2$.

الحل:

$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$ بذلك فإن $f'(x) = +(1-x)^{-2}$ و $f''(x) = 2(1-x)^{-3}$ و $f'''(x) = +6(1-x)^{-4}$ وبوضع $x = 0$ نجد أن:

$f(0) = 1$ و $f'(0) = +1$ و $f''(0) = 2$ و $f'''(0) = +6$ وبالتالي فإن:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + 0(x^4)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} \cdot 2 + \frac{x^3}{6} \cdot 6 + 0\,x^4 = 1 + x + x^2 + x^3 + 0\,x^4$$

ومنها نرى أن:

$$f(0.2) = 1 + (0.2) + (0.2)^2 + (0.3)^3 = 1.248$$

(قارن هذه النتيجة بالعدد $1.25 = \frac{1}{1-0.2}$)

الآن لكي نلم بالأخطاء التي ترد عند القيام بأي حسابات وكذلك كي نلم بعمق بتقدير هذه الأخطاء لابد لنا من أن نلقي نظرة ولو سريعة على مبرهنة تايلور.

1.3.1 مبرهنة تايلور وتقدير الخطأ

لتكن الدالة $f(x)$ ومشتقاتها الأولى مستمرة في الفترة بين a و x، عندئذ تعطي $f(x)$ بالعلاقة:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + R_{n+1} \qquad ...... (1.8)$$

وحيث يعطى R_{n+1} بالعلاقة :

$$R_{n+1} = f^{(n+1)}(\zeta)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad ...... (1.9)$$

و ζ هو عدد يقع ما بين a و x .

البرهان:

من النظرية الأساسية للتكامل؛نحن نعلم بأن:

$$\int_a^x f'(t) \quad dt = f(x) - f(a) \qquad ...... (1.10)$$

بالتكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\begin{aligned} \int_a^x f'(t)\, dt &= xf'(x) - af'(a) - \int_a^x f''(t)\, dt \\ &= x[f'(x) - f'(a)] + (x-a)f'(a) - \int_a^x t \;\, f''(t)\, dt \qquad ...... (1.11) \\ &= (x - x_o)f'(a) + \int_a^x (x-t)\; f''(t)\, dt \end{aligned}$$

وبتكرار عملية التكامل بالتجزيء n من المرات نصل إلى النتيجة:

$$f(x)= f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+.... \\ +\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad ......(1.12)$$

نضع:

$$R_{n+1}=\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad ......(1.13)$$

وهي الصيغة التكاملية للمتبقي والذي يمثل الخطأ في بتر المتسلسلة.

الآن من مبرهنة القيمة المتوسطة نرى أن :

$$\int_a^x F(t)g(t)\,dt = F(\zeta)\int_a^x g(t)\,dt \qquad ......(1.14)$$

وحيث $g(t)\geq 0$ و $\zeta\in[a,x]$. نضع $F(t)=f^{(n+1)}(t)$ و $g(t)=\frac{(x-t)^n}{n!}$ في R_{n+1} لنحصل من المبرهنة السابقة على :

$$R_{n+1}=\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt = f^{(n+1)}(\zeta)\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt \\ = f^{(n+1)}(\zeta)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad ......(1.15)$$

وبذلك نكون قد وصلنا إلى ما تطلبته المبرهنة من نتائج.

وتسمى مبرهنة تايلور أيضا بمبرهنة المتبقي؛ والمتبقي هو الحد R_{n+1}. من المبرهنة السابقة. نلاحظ أن الخطأ عند بتر المتسلسلة عند n من الحدود هو $|R_{n+1}|$. وهذا يمكن

تقديره كما يلي:

$$|R_{n+1}| \leq \left|\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}\right|_{\max} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{...... (1.16)}$$

ويمثل الحد $\left|\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}\right|_{\max}$ أكبر قيمة للمشتقة $(n+1)$ للدالة في الفترة من a إلى x.

ولتوضيح الخدمة التي تقدمها مبرهنة تايلور لتقدير الخطأ نعود فنتناول الأمثلة الثلاثة السابقة وندرسها في هذا السياق.

مثال (8.1)

قم بتقدير الخطأ f لكل من :

(أ) $\sin x$ محسوبة حتى $0(x)^4$ عند $x = 0.1$.

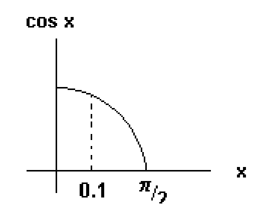
(ب) e^x محسوبة حتى $0(x)^3$ عند $x = 0.5$.

(ج) $\frac{1}{1-x}$ محسوبة حتى $0(x)^4$ عند $x = 0.2$.

الحل:

(أ) هنا $n+1=5$ و $f(x)=\sin x$ كما أن $f^{(5)}(x)=\cos x$ وأكبر قيمة للمشتقة في الفترة $\left[0, \pi/6\right]$ كما هو واضح من الشكل (2.1) هي $\cos 0 = 1$ بذلك فإن:

$$|R_5| \leq \frac{\left(\pi/6\right)^5}{5!} = 0.000328$$



الشكل (2.1) المثال (8.1) أ

ولو حسبنا الخطأ الحقيقي أو الفعلي والذي يساوي

$$\varepsilon = \sin\left(\pi/6\right) - 0.4996752 = 0.000325$$

وهو خطأ مازال في حدود $|R_5|$ كما أن حساب $\sin x$ حتى $0(x)^5$ أعطى نتيجة جيدة مقارنة بما حصلنا عليه من تقدير للخطأ..نلاحظ هنا أننا حسبنا الخطأ من الرتبة الخامسة رغم أن المطلوب كان هو الخطأ من الرتبة الرابعة و السبب في ذلك أن المشتقة الرابعة عند 0 تساوي الصفر.

(ب) هنا $n+1=3$ ولكن $\frac{d^3e^x}{dx^3} = e^x$ وحيث أن الدالة e^x دالة تزايدية فإن $\left|\frac{d^3e^x}{dx^3}\right|_{\max} = e^{0.5}$ وبذلك فإن:

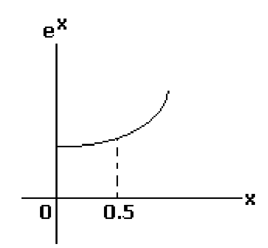
$$|R_3| = \frac{(0.5)^3}{3!} e^{0.5} = 0.03435$$

أي أن الخطأ في $e^{0.5}$ حتى $0(0.5)^3$ لا يتجاوز 0.03435

الآن لو حسبنا الخطأ الفعلي لو جدنا أن :

$$\varepsilon = e^{0.5} - 1.625 = 0.02372$$

ومقارنة بتقدير الخطأ الناتج نرى أن ε لم يتجاوز $|R_3|$ كما أن ثلاثة حدود من e^x أنتجت قيمة جيدة إلى حد ما. أنظر الشكل (3.1)



الشكل (3.1) المثال (8.1) ب

(ج) هنا $n+1=4$ كما نرى أن $f^{(4)}(x)=24(1-x)^{-5}$ ؛ كما أنه من الواضح أن $f^{(4)}(x)\big|_{\max}=24(1-0.2)^{-5}=\dfrac{24}{(0.8)^5}=73.24$ في الفترة $[0,0.2]$ وبذلك فإن:

$$|R_4|\le\frac{(0.2)^4}{4!}(73.24)=0.004883$$

ولكن الخطأ الحقيقي هنا هو:

$$\varepsilon=\frac{1}{1-0.2}-1.248=0.002$$

ونرى انطباق نفس الملاحظات السابقة على هذا المثال وهو أن $\varepsilon<0.00488$ كما أن أخذ أربعة حدود من المتسلسلة قاد إلى نتيجة جيدة.

وهكذا نرى مما تقدم أنه لعدة حالات عالجناها وجدنا أن تقدير الخطأ باستخدام

رتب دينا أعطى قيم ليست ببعيدة من قيمة الخطأ الحقيقي؛ ولكي نحصل على تقدير أفضل للخطأ علينا أن نرقى لرتب أعلى في الخطأ، أي أن نقوم ببتر المتسلسلة بعد العديد من الحدود.

4.1 برامج وبرمجيات

إن الحسابات العددية كما لاحظنا من بعض الأمثلة البسيطة تحتاج إلى جهد كبير وللوصول إلى الدقة المطلوبة لن تكون الحسابات اليدوية كافية، عليه نلجأ إلى القيام بهذه الحسابات الكثيرة والمركبة ورسم المنحنيات والأشكال ذات العلاقة باستعمال الحواسيب وهنا إما:

1. أن نلجأ إلى برمجيات جاهزة مثل EXCELL و MATLAB أو MATCAD حيث نزود البرنامج المعد سلفاً ببعض الأعداد لنحصل على ما نريد،ولكن هذا لا يكون مفيداً دائماً حيث تتطلب المسألة أكثر مما يقدمه البرنامج أو البرمجية.

2. أن نستخدم ما هو موجود من برامج مع استخدام مهارتنا الشخصية في كتابة البرمجيات والبرامج غير المتوفرة باستعمال لغات متقدمة مثل فورتران 90 ولغة السي بجميع أشكالها.

في هذا الكتاب سوف نعتمد معظم ما هو موجود من برمجيات وسوف نسوق البرامج بمختلف أجزاء الكتاب بعدة لغات حاسوبية من لغة فورتران 90 التي تعمل تحت ويندوز 95 و 98 ولغة السي ولغة الباسكال ولغة السي المرئية و ...إلخ. ونود

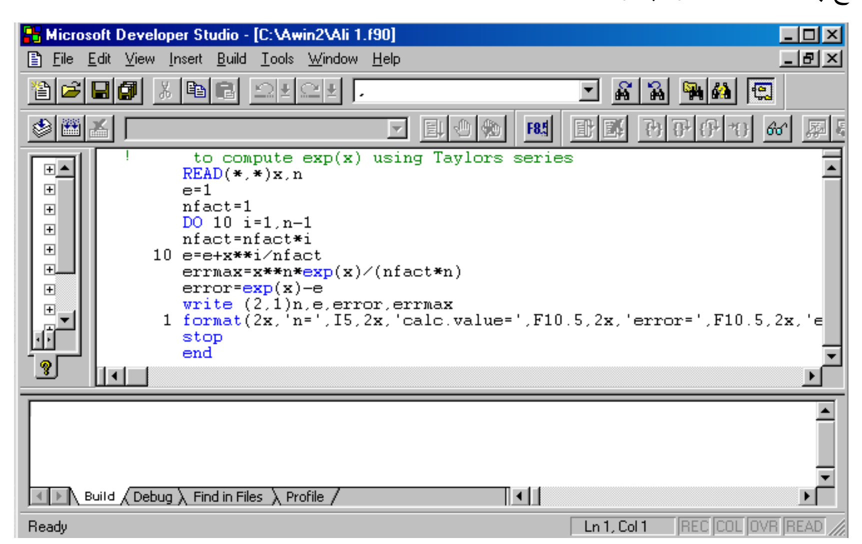
بذلك أن نؤكد على أن الحواسيب ولغات البرمجة ما هي إلا أدوات مساعدة للوصول إلى النتائج المطلوبة في حساباتنا. بيد أنه يجب ملاحظة أن اللغة الرئيسية في هذا الكتاب هي فورتران 90.

مثال (9.1)

أكتب برنامجا يحسب $e^{0.5}$ حتى $0(0.5)^3$ ويقوم أيضا بتقدير الخطأ ومقارنته مع الخطأ الواقعي.

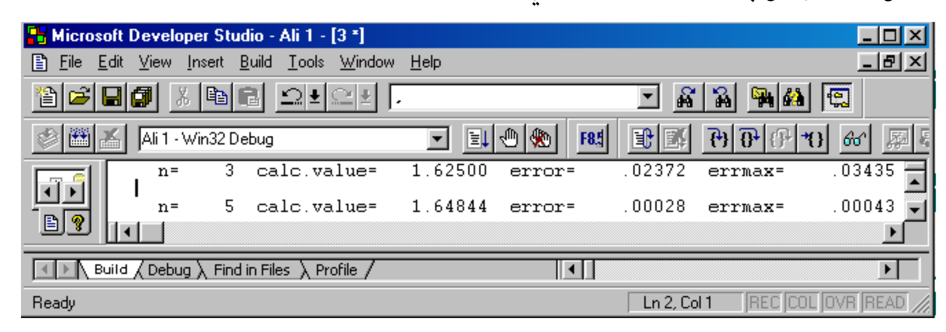
الحل:

استنادا إلى حل المثال (8.1) الفقرة (ب) نقوم بكتابة البرنامج بلغة فورتران (90) وحيث نورد النتائج بالشكل (4.1) والجدول (1.1).



الشكل (4.1) برنامج بلغة الفورتران يحسب e^x حتى $0(x^n)$ - المثال (9.1)

ومن هذه النتائج نرى مدى الخدمة والدقة التي يقدمها لنا الحاسوب وننوه هنا أن البرنامج عام لهذه الدالة أي أنه نستطيع تغيير رتبة الخطأ وقيمة x أنظر الجدول (1.1) الذي يعطي النتائج لنفس الدالة ولكن بـ $n = 5$ (الصف الثاني).



الجدول (1.1) نتائج برنامج المثال (9.1) لقيم $n = 3,5$ على التوالي.

تمارين (1)

1. أضرب أمثلة عددية من عندك تشرح فيها المراحل المختلفة التي يتم من خلالها الحصول على نتائج عددية ما.
2. متغير a قيمته الحقيقية هي 5 وقيمته المحسوبة هي 4.95 احسب الأخطاء المختلفة.
3. اكتب نبذة مفصلة توضح فيها مسببات الأخطاء الخطيرة التي يمكن أن تحصل عند استخدام الحواسيب.
4. إذا كانت x و y تمثلان أطوالا قيست وكانتا تقريبا $x \cong 3.32$ و $y \cong 5.39$ احسب تقريبا القيم $x+y$ ،$x+0.1y$ و $x+0.01y$ وذلك حتى ثلاثة أرقام عشرية. (ما مصدر الأخطاء في هذه المسألة واحسب قيمتها).
5. لتكن $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ هي تقريبات للكميات $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ وإذا كان ε هو أكبر خطأ ممكن لكل كمية، اثبت أن أكبر خطأ ممكن في المجموع $\sum_{i=1}^{n} x_i$ هو $n\varepsilon$.
6. كيف يتم بتر أو قطع متسلسلة تايلور؟
7. لما يسمى الحد R_{n+1} بالمتبقي وما الفائدة التي نجنيها من هذا الحد؟
8. أعد حل المثال (8.1) ب ولكن بالحساب حتى $0(0.5)^5$ ثم قدر الخطأ الناتج عندئذ وقارن مع نتائج المثال (9.1).

9. أكتب متسلسلة تايلور لما يلي:

(أ) e^{-x} حول $x = 0$.

(ب) $\cosh x$ حول $x = 0$.

(ج) $\sinh x$ حول $x = 0$.

(د) $\cos x$ حول $x = 0$.

(ه) $\cos x$ حول $x = \pi/2$.

(و) $\sin x$ حول $x = \pi/2$.

10. أكتب $e^{-0.2}$ حتى $0(0.2)^3$ و $0(0.2)^5$ وقدر الخطأ الناتج في كل حالة. قارن بين النتائج التي تحصلت عليها وناقش.

11. اكتب $\cosh(0.1)$ حتى $0(0.1)^4$. قدر الخطأ الناتج عن ذلك التقريب.

12. اكتب $\ln(1.1)$ حتى $0(0.1)^4$ وذلك بكتابة متسلسلة تايلور للدالة $\ln x$ حول $x = 1$ ثم بتر المتسلسلة حسب ما هو مطلوب. هل يمكنك تقدير الخطأ الناتج عن هذا التقريب.

الفصل الثاني

الحسبان الفرقي

يحتوي هذا الفصل على:

1.2 المؤثرات الفرقية

لو أعطينا بيانات ما ممثلة لدالة ما فإنه ومما لا شك فيه سوف يتبادر إلى ذهننا أسئلة كثيرة مثل: كيف تفاضل أو كيف تكامل الدالة الممثلة بتلك البيانات والتي لا تتعدى كونها عبارة عن أعداد، وكيف نستخدم العمليات الحسابية البسيطة من جمع وطرح وضرب وقسمة لإنجاز عمليات معقدة مثل التفاضل والتكامل.

قد تكون العملية صعبة بعض الشيء ولكن الحسبان الفرقي سوف يسهل علينا المهمة ويعطينا الجواب للأسئلة المطروحة سابقاً. نبدأ أولا بدراسة مختلف أنواع المؤثرات.

1.1.2 المؤثر الفرقي الأمامي

لو عدنا إلى مفكوك تايلور والذي قمنا بالتعرف عليه في الفصل السابق وأردنا أن نكتب $f(x+h)$ بدلالة $f(x)$ فإننا نحصل على:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \qquad ...... (2.1)$$

وحيث x هي نقطة ما في نطاق تقارب الدالة f كما أن $x+h$ هي نقطة أخرى تبعد عن x بالمقدار الصغير h وتقع أيضاً في نفس النطاق المذكور.

من المعادلة (2.1) نرى أن:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \qquad ...... (2.2)$$

الآن لو وضعنا $f(x) = f_j$ و $f(x+h) = f_{j+1}$ لحصلنا على :

$$f'(x) = \frac{f_{j+1} - f_j}{h} + O(h) \qquad ...... (2.3)$$

و j هذه يمكن أن تأخذ القيم $j = 0,1,2,....$. مما تقدم نعرف المؤثر الفرقي الأمامي الأول (Δ) للدالة f عند النقطة j بالعلاقة:

$$\Delta f_j = f_{j+1} - f_j \qquad ...... (2.4)$$

ومن تعريف Δf_j (المعادلة (2.4)) نتبين السبب في تسمية المؤثر Δ بالمؤثر الفرقي **الأمامي**. من المعادلتين (2.3) و (2.4) نحصل على :

$$f'(x) = \frac{\Delta f_j}{h} + O(h) \qquad ...... (2.5)$$

وهكذا نرى أن المعادلة (2.5) تعطينا بعض الإجابة عن كيفية تفاضل دالة ما.. في فصل التفاضل والتكامل سوف نتعرض بالتفصيل لمثل هذه المواضيع.

بشكل عام لو كانت المسافة بين أي قيمتين متتاليتين للمتغير x هي h (ثابت) ولو كانت نقطة البداية هي x_o فإن $x_i = x_o + i\,h$ وحيث $i = 0,1,2,....$ وحيث x_n هي آخر نقطة في الجدول، كما أنه لو كانت قيم المتغير التابع مشار إليها بـ $y_i \left(\equiv f\left(x_i\right)\right)$ ، فإن:

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n \qquad (n = 0,1,2,......) \qquad ...... (2.6)$$

و Δy_n هي المؤثر الفرقي الأمامي الأول عند النقطة $\left(x_n, y_n\right)$. يمكننا تعريف المؤثر الفرقي الأمامي الثاني (أي من الرتبة الثانية) عند النقطة n بالعلاقة:

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n \qquad (n = 0,1,2,......) \qquad ...... (2.7)$$

وهذه يمكن كتابتها بالتفصيل باستخدام النقاط (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}) و (x_{n+2}, y_{n+2}) وذلك كما يلي:

$$\Delta^2 y_n = (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n \qquad ......(2.8)$$

بنفس الطريقة نعرف المؤثر الفرقي النوني(أي من الرتبة n) عند النقطة (x_m, y_m) وبذلك نعني أن:

$$\Delta^n y_m = \Delta^{n-1} y_{m+1} - \Delta^{n-1} y_m \qquad ......(2.9)$$

وانطلاقاً مما تقدم نكون الجدول الفرقي الأمامي على الصورة:

الجدول (1.2) - جدول فرقي أمامي

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
y_o				
	Δy_o			
y_1		$\Delta^2 y_o$		
	Δy_1		$\Delta^3 y_o$	
y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_o$
	Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
y_3		$\Delta^2 y_2$		
y_4				

فعلى سبيل المثال لو كانت لدينا البيانات التالية: $(3,15)$, $(2,7)$, $(1,5)$, $(0,1)$ فإننا نرى أن: $h = 1$ ويكون الجدول الفرقي الأمامي هو كما بالجدول (2.2).

الجدول (2.2)

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1			
	4		
5		-2	
	2		8
7		6	
	8		
15			

ونلاحظ أن المؤثر Δ ينطق (دلتا) كما أن Δy_n غير معرف إذا كانت النقطة (x_n, y_n) هي آخر نقطة بالجدول.

2.1.2 المؤثر الفرقي الخلفي

لو عرفنا $\nabla y_1 = y_1 - y_o$ وبشكل عام وضعنا:

$$\nabla y_n = y_n - y_{n-1} \qquad \text{...... (2.10)}$$

فإن ∇ عندئذ هو المؤثر الفرقي الخلفي الأول (ينطق دل) عند النقطة n. كما أن المؤثر الخلفي الثاني عند النقطة n هو :

$$\nabla^2 y_n = \nabla y_n - \nabla y_{n-1} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} \qquad \text{...... (2.11)}$$

و يتضح من المعادلة (2.11) بأن:

$$\nabla^2 y_n = \Delta^2 y_{n-2} \qquad \text{...... (2.12)}$$

والمؤثر الفرقي الخلفي من الرتبة m عند النقطة n هو:

$$\nabla^m y_n = \nabla^{m-1} y_n - \nabla^{m-1} y_{n-1} \qquad \text{...... (2.13)}$$

ويكون الجدول الفرقي الخلفي كما هو موضح بالجدول (2.3).

الجدول (2.3) - جدول فرقي خلفي.

y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
y_o				
	∇y_1			
y_1		$\nabla^2 y_2$		
	∇y_2		$\nabla^3 y_3$	
y_2		$\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_4$
	∇y_3		$\nabla^3 y_4$	
y_3		$\nabla^2 y_4$		
	∇y_4			
y_4				

ونلاحظ على المؤثر الفرقي الخلفي ما يلي:

1. أول مواقع للمؤثرات من الرتب المختلفة هي $\nabla y_1, \nabla^2 y_2, \nabla^3 y_3, ..., \nabla^n y_n$.
2. $\nabla^m y_n = \Delta^m y_{n-m}$ فمثلاً $\nabla y_1 = \Delta y_o$ و $\nabla^2 y_2 = \Delta^2 y_o$ وهكذا.
3. ينطق المؤثر الأمامي Δ على أنه دلتا (Delta) والمؤثر الخلفي ∇ على أنه (دِلْ) (Del).

ولو أننا أخذنا في الاعتبار البيانات المعطاة بالجدول(2.2) فإن : $\Delta y_o = 4$ وهي نفسها Δy_1، كما أن $\Delta^2 y_o = -2$ و $\nabla^2 y_3 = 6$.

3.1.2 مؤثرات أخرى

كما سبق وأن نوهنا بأن Δ و ∇ هما مؤثران فرقيان ولهما تأثير المؤثرات المعهودة فمثلا نرى أن : $\Delta(\Delta y_n) = \Delta^2 y_n$ و $\nabla(\nabla y_n) = \nabla^2 y_n$ ؛ كما أن:

$$\Delta(\nabla y_n) = \Delta(y_n - y_{n-1}) = \Delta y_n - \Delta y_{n-1} = \nabla(\Delta y_n) \qquad ...... (2.14)$$

ومن المعادلة (2.14) نستنتج بأن $\Delta(\nabla) = \nabla(\Delta)$.

من المؤثرات الأخرى مؤثر الإزاحة E و نوضح تأثيره كما يلي:

$$E\, y_n = y_{n+1} \qquad ...... (2.15)$$

أي أن المؤثر E يضيف h إلى قيمة x.

من الواضح هنا أن : $\Delta E \equiv E\Delta$ و $\nabla E \equiv E\nabla$.

هذا وتوجد علاقة مهمة بين المؤثرين E و Δ؛ تلك نوضحها على النحو التالي:

$$\because \quad \Delta y_n = y_{n+1} - y_n = E\, y_n - y_n = (E-1)y_n \qquad \text{...... (2.16)}$$

عليه فإن:

$$E = 1 + \Delta \qquad \text{...... (2.17)}$$

نلاحظ أيضاً أن:

$$\begin{aligned} E(1-\nabla)y_n &= E\, y_n - E\nabla\, y_n = y_{n+1} - E(y_n - y_{n-1}) \\ &= y_{n+1} - Ey_n - Ey_{n-1} = y_{n+1} - y_{n+1} + y_n = y_n \end{aligned} \qquad \text{...... (2.18)}$$

بنفس الطريقة يمكن أن نوضح بأن:

$$(1-\nabla)E\, y_n = y_n \qquad \text{...... (2.19)}$$

من المعادلتين (2.18) و (2.19) نستنتج بأن:

$$E(1-\nabla) = (1-\nabla)E = 1 \qquad \text{...... (2.20)}$$

ومن المعادلة (2.20) نكتب مجازاً:

$$E = (1-\nabla)^{-1} \qquad \text{...... (2.21)}$$

يوجد مؤثر آخر وهو المؤثر الفرقي المركزي δ ويعرف بالعلاقة:

$$\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{...... (2.22)}$$

أي أن:

$$\delta\, y_{\frac{1}{2}} = \left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right) y_{\frac{1}{2}} = y_1 - y_o \qquad \text{...... (2.23)}$$

ونلاحظ هنا بأن δ (وكذلك δ^3 وδ^5 و .... الخ) تؤثر على قيم y الكسرية من دليلها. (في تركيبها)، بينما تؤثر δ^2 (وكذلك δ^4 و δ^6 و......الخ) على القيم الصحيحة من دليلها وهذا نوضحه كما يلي:

حيث أن:

$$\delta^2 = \left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} \right)^2 = E^1 - 2 + E^{-1} \qquad \text{...... (2.24)}$$

عليه فإن:

$$\delta^2 y_n = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} \qquad \text{...... (2.25)}$$

و الجدول (4.2) يمثل جدولاً فرقياً مركزياً.

ونتوه هنا بأن القيم الكسرية في دليل y هي من صنعنا وتؤول الحسابات كلها بدلالة القيم ذات الدليل الصحيح.

كما أنه يتم ترتيب البيانات في هذه الحالة بحيث تكون y_o داخل جسم الجدول بينما يرقم ما قبلها بالسالب وما بعده بالموجب. لاحظ أنه في حالة الجدول الفرقي الأمامي نبدأ بقمة الجدول بينما نبدأ بقاعدة الجدول بالنسبة للجدول الفرقي الخلفي.

الجدول (4.2)- جدول فرقي مركزي.

y	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$	$\delta^4 y$
y_{-1}				
	$\delta y_{-\frac{1}{2}}$			
y_0		$\delta^2 y_{-1}$		
	$\delta y_{1/2}$		$\delta^3 y_{-1/2}$	
y_1		$\delta^2 y_o$		$\delta^4 y_0$
	$\delta y_{\frac{3}{2}}$		$\delta^3 y_{1/2}$	
y_2		$\delta^2 y_1$		
	$\delta y \frac{5}{2}$			
y_3				

لو عدنا للجدول (2.2) فإننا نرى أن :

$$\delta y_{1/2} = y_1 - y_o = 5 - 1 = 4$$

كما أن:

$$\delta^2 y_1 = y_2 - 2y_1 - y_o = 7 - 2(5) + 1 = -2$$

مما تقدم رأينا انه يمكننا حساب $\delta y_{1/2}$ و $\delta^2 y_o$. ماذا عن δy_o و $\delta^2 y_{1/2}$ ؟ هل

يمكننا حسابهما ! و هل يكون لهما أي معنى؟ للإجابة على هذا السؤال نقدم إلى المؤثر الفرقي المتوسط μ والذي يعرف على النحو:

$$\mu = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad \text{...... (2.26)}$$

أي أن:

$$\mu y_{1/2} = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right) y_{1/2} = \frac{1}{2}\left(y_1 + y_o\right) \qquad \text{...... (2.27)}$$

ومن هذه المعادلة يتضح السبب من وراء تسمية μ بالمؤثر الفرقي المتوسط. نلاحظ أيضاً أن:

$$\mu\,\delta = \delta\mu = \frac{1}{2}\left(E^{1} + E^{-1}\right) \qquad \text{...... (2.28)}$$

وبالتالي فإن:

$$\mu\,\delta\, y_o = \frac{1}{2}\left(E^{1} + E^{-1}\right) y_o = \frac{1}{2}\left(y_1 + y_{-1}\right)$$

فمثلاً بالرجوع للجدول (2.2) ولو أردنا حساب $\mu\,\delta\, y_1 = \frac{1}{2}\left(y_2 - y_o\right)$ فإنه عندئذ نحصل على:

$$\mu\,\delta\, y_1 = \frac{1}{2}\left(7 - 1\right) = 3$$

ملاحظة هامة:

لاحظ أنه لمؤثر الإزاحة الميزة التالية وهي أن:

$$E^{m}\, y_n = y_{n+m} \qquad \text{...... (2.29)}$$

وهذا واضح من العمليات الموضحة في المعادلات (2.15) و (2.23) و(2.25) و (2.26).

2.2 تطبيقات على المؤثرات

(أ) تعيين درجة الحدودية الممثلة ببيانات ما

إحدى التطبيقات المهمة للمؤثرات Δ و ∇ هي تعيين درجة الحدودية المعطاة في شكل بيانات.

الآن حيث أن الحدودية $P_n(x)$ من الدرجة n تأخذ الشكل:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o \qquad ......\ (2.30)$$

ولو قمنا بالتركيز على x^n والذي يمثل أكبر قوة(أو أس) في الحدودية فإن:

$$\Delta(x^n) = (x+h)^n - x^n$$

وحيث h هو مقدار الزيادة في x. ولكن نلاحظ أن:

$$(x+h)^n = x^n + n\,h\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 x^{n-2} + ... + h^n$$

بذلك فإن:

$$\Delta(x^n) = \left[x^n + n\,h\,x^{n-1} + ... + h^n\right] - x^n$$
$$= n\,h\,x^{n-1} + ... + h^n$$

وبذلك يتضح أن $\Delta(x^n)$ هو حدودية من الدرجة $n-1$، أي أن تأثير Δ على x^n كان في تخفيض درجتها بدرجة واحدة. ونلاحظ أن الحد الريادي للحدودية الناتجة هنا هو $n\,h^1\,x^{n-1}$.

يمكننا السير على نفس النهج و الاستنتاج بأن $\Delta^2(x^n)$ هو حدودية من الدرجة $n-2$ وحدها الريادي هو $n(n-1)h^2\,x^{n-2}$ و $\Delta^n(x^n)$ هو ثابت قيمته $n!h^n$.

وبذلك فإن $\Delta^{n+1}(x^n) = 0$.

ولو عدنا للحدودية بشكل عام فإن $\Delta^r P_n (r \le n)$ هو حدودية من الدرجة $n-r$ وحدها الريادي هو

$$n(n-1)....(n-r+1)h^r x^{n-r} a_n ،$$

كما أن :

$$\Delta^n P_n = n! h^n a_n$$

أي أنه إذا قمنا بكتابة الجدول الفرقي فإن العمود الذي يدلل على $\Delta^n y$ سيكون ثابتاً والعمود الموالي عبارة عن أصفار.

مثال (1.2)

إذا كانت البيانات الموالية تمثل حدودية ما فأوجد درجتها. والبيانات هي:

(0,0) ، (1,1) ، (2,8) ، (3,27) ، (4,64) ،(5,125)

الحل:

نكتب الجدول الفرقي كما هو مبين أسفله لنرى أن درجة الحدودية هي الثالثة.

الجدول (5.2)- المثال (1.2)

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0				
	1			
1		6		
	7		6	
8		12		0
	19		6	
27		18		0
	37		6	
64		24		
	61			
125				

ملاحظة:

يمكن إثبات أن $\nabla^n P_n =$ ثابت بنفس الكيفية السابقة التي اتبعناها للمؤثر Δ.

(ب) حساب قيم جديدة بالجدول

هنا نستخدم العلاقة (2.21) وأن:

$y_{n+1} = Ey_n$. عندئذ نرى أن:

$$y_{n+1} = Ey_n \equiv (1-\nabla)^{-1} y_n \equiv (1+\nabla+\nabla^2+\ldots+\nabla^m+\ldots)y_n \qquad \ldots\ldots (2.31)$$

ولو أن البيانات تمثل حدودية من الدرجة m فإن الحدود التي تحتوى على $\nabla^{m+1} y_n$ فما أعلى تتلاشى وذلك باستعمال الخاصية التي نوهنا عنها بالبند السابق وبذلك فإن:

$$y_{n+1} = y_n + \nabla y_n + ... + \nabla^m y_n \qquad ...... (2.32)$$

والعلاقة (2.32) تمكننا من حساب y_{n+1} من y_n ؛أي أنها تمكنا من حساب مداخل جديدة بالجدول الفرقي.

مثال (2.2)

احسب $y_6 = y(6)$ للمثال السابق (1.2).

الحل:

من الجدول السابق للمثال (1.2) نرى أن:

$$\begin{aligned} y_6 &= y_5 + \nabla y_5 + \nabla^2 y_5 + \nabla^3 y_5 \\ &= 125 + 61 + 24 + 6 = 216 \end{aligned}$$

(ج) تعيين صيغة الحدودية الممثلة ببيانات ما

سبق وأن ذكرنا بأن $x_n = x_o + nh$. من هذه العلاقة نرى أن: $n = \dfrac{x_n - x_o}{h}$. كما أن: $y_1 = E\, y_o$ و $y_2 = E\, y_1 = E^2\, y_o$ وبشكل عام $y_n = E^n\, y_o$ وعليه نرى أن:

$$y_n = y(x_n) = E^n y_o = (1 + \Delta)^n y_o \qquad ...... (2.33)$$

وبإجراء الفك باستخدام نظرية ذات الحدين نحصل على:

$$y_n = \begin{pmatrix} 1 + n\Delta + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 + ... \\ + \frac{n(n-1)....(n-r+1)}{r!}\Delta^r + ... \end{pmatrix} y_o$$

$$= y_o + n\Delta y_o + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_o + ... + \frac{n(n-1)....(n-r+1)}{r!}\Delta^r y_o \qquad ...... (2.34)$$

وتكون هذه المتسلسلة منتهية إذا كانت البيانات تمثل حدودية. و حيث أن n هي أي قيمة عليه نكون قد وصلنا إلى صيغة الحدودية.

الآن لدينا عدة حالات:

الحالة الأولى

عندما $x_o = 0$ و $h = 1$ في هذه الحالة $n = x_n$ و يكون الجمع (2.34) هو:

$$y_n = y(x_n) = y_o + x_n\Delta y_o + \frac{x_n(x_n - 1)}{2!}\Delta^2 y_o + ... \qquad ...... (2.35)$$

وحيث أن $n = x_n$ هي أي قيمة، عليه نضعها مساوية x ونحصل على:

$$y(x) = y_o + x\Delta y_o + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 y_o + ... \qquad ...... (2.36)$$

مثال (3.2)

أوجد صيغة الحدودية الممثلة بالبيانات بالمثال (1.2).

الحل:

نلاحظ هنا أن $x_o = 0$ و $h = 1$، عليه نستطيع تطبيق العلاقة (2.36) مع مراعاة أن $y_o = 0$ ، $\Delta y_o = 1$ ، $\Delta^2 y_o = 6$ و $\Delta^3 y_o = 6$ وبذلك فإن:

$$y(x) = y_o + x\Delta y_o + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 y_o$$
$$= y_o + x(1) + \frac{(x^2 - x)}{2!}6 + \frac{(x^3 - 3x^2 + 2x)}{2!}6$$
$$= x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x = x^3$$

أي أن الحدودية هي $y(x) = x^3$.

الحالة الثانية

عندما يكون لدينا $x_o = 0$ و $h \neq 1$،عندئذ $n = \frac{x_n - 0}{h} \equiv \frac{x}{h}$ ومن العلاقة (2.34) نحصل على :

$$y(x) = y_o + \frac{x}{h}\Delta y_o + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2}{2!} y_o + ... \qquad ...... (2.37)$$

مثال (4.2)

إذا كانت البيانات: (6,40)، (4,20) ، (2,8) ، (0,4) ممثلة لحدودية فأوجد صيغتها.

الحل:

نلاحظ هنا بأن $x_o = 0$ و $h = 2$، عليه نطبق العلاقة (2.37) لإيجاد صيغة الدالة. ولأجل ذلك نكون الجدول الفرقي الموالي [الجدول (6.2)].

الجدول (6.2) – المثال (4.2).

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
4			
	4		
8		8	
	12		
20		8	
	20		
40			

بعد ذلك نلاحظ أن $y_o = 4 \,,\, \Delta y_o = 4 \,,\, \Delta^2 y_o = 8$، عليه من العلاقة (2.37) نرى أن:

$$y(x) = y_o + \frac{x}{h}\Delta y_o + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2}{2!}y_o$$
$$= 4 + \frac{x}{2}(4) + \frac{x}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right)\frac{8}{2}$$
$$= 4 + 2x + x(x-2) = x^2 + 4$$

وهي الحدودية المطلوبة. هذا ويمكن التحقق من صحة ما توصلنا إليه من صيغة وذلك بالتعويض عن قيم $x = 0,2,4,6$ في $y(x)$ للتأكد من مطابقة قيم y المعطاة بالجدول.

الحالة الثالثة

في الحالة العامة $x_o \neq 0$ و $h \neq 1$ تستخدم العلاقة العامة (2.34).

وحيث $n = \frac{x_n - x_o}{h}$.

مثال (5.2)

قم بإيجاد صيغة الحدودية الممثلة بالبيانات: (8,68) , (6,40) , (4,20) , (2,8).

الحل:

هنا نرى أن $x_o = 2 \neq 0$ و $h = 2 \neq 1$ بذلك نستخدم العلاقة العامة:

$$y(x) = y_o + \frac{(x - x_o)}{h}\Delta y_o + \frac{(x - x_o)}{h}\left(\frac{(x - x_o)}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2}{2!}y_o + ...$$

ومن الجدول (7.2) نحصل على :

$$\begin{aligned} y(x) &= 8 + \frac{(x-2)}{2}12 + \frac{(x-2)}{2}\left(\frac{(x-2)}{2} - 1\right)\frac{8}{2!} \\ &= 8 + 6x - 12 + (x-2)(x-2-2) \\ &= 8 + 6x - 12 + x^2 - 6x + 8 = x^2 + 4 \end{aligned}$$

الجدول (7.2)- المثال (5.2).

y	Δy	$\Delta^2 y$
8		
	12	
20		8
	20	
40		8
	28	
68		

وهكذا حصلنا على الصيغة المطلوبة والتي تتحقق بكل نقاط البيانات.

ملاحظات هامة

1. من المفيد والمهم ملاحظة أنه يوجد تشابه بين عملية التفاضل والعملية الفرقية، فعلى سبيل المثال لو كانت لدينا حدودية من الدرجة الثانية فإن $\frac{d^2y}{dx^2} = ثابت$ وكذلك وكما لاحظنا من هذا البند $\Delta^2 y = ثابت$. عموماً لو وجدنا ونحن نكون الجدول الفرقي أن $\Delta^m y$ قد ثبتت فإن ذلك يعني أن البيانات تمثل حدودية من الدرجة m.
2. يجب أن نضع في الحسبان دائماً أن $(n+1)$ من النقاط تكفي لتمكيننا من إيجاد المعاملات $(n+1)$ لأي حدودية من الدرجة n.
3. نستخدم المؤثر الفرقي الأمامي وكذلك الخلفي فقط في الحالات التي تكون منها قيم x متساوية التباعد (أي عندما $h = ثابت$).
4. يجب أن لا نقبل جداول البيانات كما هي وخصوصا إذا حدث أن لم يتقارب الجدول عند لحظة ما. فمن السهل جداً أن تحدث الأخطاء من قبيل التقريب أو من خلال أخطاء مطبعية أو أن يتم تبادل القيم بالجدول أثناء إعداده ...... الخ.
5. **طول الخطوة** h

يكون تباعد قيم x، عموماً، مساويا للقيمة h، أي أنه إذا كانت إحدى القيم هي x فالقيمة الموالية هي $x+h$ والتي تليها $x+2h$ ... وهكذا. هذا هو ما نعنيه بتساوي

التباعد في قيم x و طول الخطوة h. إن اختيار طول الخطوة h مهم للغاية في حالة مسألة ما؛ حيث أن الاختيار المناسب يوفر علينا الوقت والجهد. فلو قمنا باختيار قيمة صغيرة جداً لـ h، فهذا يتسبب لنا في القيام بجهد كبير حتى نحصل على الدقة المطلوبة لحساباتنا. كما أنه في حالة اختيار قيمة كبيرة لـ h لا يمكننا إهمال الفروق من الرتب العليا.

في أغلب الصيغ شائعة الاستعمال يتم إهمال الفروق من الرتب الأعلى من الرتبة الرابعة؛ عليه نختار h على هذا الأساس. ولنوضح أهمية اختيار h دعنا نأخذ في الاعتبار الدالة $y = e^x$. عندئذ نرى أن:

$$\Delta y = e^{x+h} - e^x = e^x\left(e^h - 1\right) \quad \text{و} \quad \Delta^2 y = e^{x+h}\left(e^h - 1\right) - e^x\left(e^h - 1\right) = e^x\left(e^h - 1\right)^2$$

كما أنه لأي عدد صحيح موجب n نحصل على : $\Delta^n y = e^x\left(e^h - 1\right)^n$

فإذا أردنا أن يؤول $\Delta^n y$ إلى الصفر عندما تتزايد قيمة n، يجب أن نختار h بحيث تحقق $e^h - 1 < 1$ أي أن تحقق h المتباينة $h < 0.69$.

وهذا بالتأكيد يعني أنه لو كانت $h > 0.69$ فإن الجدول الفرقي لن يتقارب. نلاحظ هنا ولهذا المثال أنه لو كانت $h << 1$ (صغير جداً) فإن $e^h - 1 \approx h$ وبذلك فإن $\Delta y = hy$ و $\Delta^n y = h^n y$؛ وهكذا نرى من هذه الصيغ للفروق مقدار الجهد الذي سيبذل في مثل هذه الحالة من الحسابات.

وعموماً وعندما نتحدث عن أهمية اختيار طول الخطوة h نرى أنه لو جعلنا

فإن $h \to 2h$ فإن $y_1 - y_o \to y_2 - y_o$ و $\Delta \to 2\Delta$. كذلك لو جعلنا $h \to \frac{1}{2}h$ فإن $E \to E_1$ وحيث $E_1 = E^{\frac{1}{2}} = (1+\Delta)^{\frac{1}{2}} \equiv 1 + \Delta_1$ وحيث $\Delta_1 = \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{8}\Delta^2 + ...$.

أي أنه عندما نجعل $h \to \frac{1}{2}h$ فإن $\Delta \to \frac{1}{2}\Delta$ تقريباً و $\Delta^2 \to \frac{1}{4}\Delta^2$ و هكذا.

6. أسلوب δ^2

إذا كانت $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتابعة متقاربة وبحيث $x_n = a + br^n$ فإن النهاية a للمتتابعة يمكن إيجادها بطريقة (أو أسلوب) يسمى بأسلوب δ^2 ونوضح عمل و استخدام هذه الأسلوب كما يلي:

حيث أن :

$$\delta^2 x_n = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} \qquad ...... (2.38)$$

وحيث أن:

$$x_n = a + br^n \qquad ...... (2.39)$$

عليه فإن:

$$\delta^2 x_n = b(1-r)^2 r^{n-1} \qquad ...... (2.40)$$

ومن المعادلة (2.39) نرى أن:

$$(x_{n+1} - x_n)^2 = b^2(1-r)^2 r^{2n} \qquad ...... (2.41)$$

عليه من (2.40) و (2.41) نحصل على :

$$x_{n+1} - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{\delta^2 \; x_n} = x_{n+1} - br^{n+1} = a \qquad ...... (2.42)$$

وهكذا نرى من المعادلة (2.42) و المعادلة (2.40) بأنه يمكننا الحصول على قيمة النهاية a وذلك باستخدام ثلاثة قيم من المتتابعة وهي x_{n-1} , x_n و x_{n+1} .

مثال (6.2)

استخدم أسلوب δ^2 لحساب نهاية المتتابعة:

$$\left\{ 3/2 \, , 5/4 \, , 9/8 \, , 17/16 \, , 33/32 \, , ... \right\}$$

وذلك بالأخذ في الاعتبار الحدود x_3 , x_4 و x_5 .

الحل:

نلاحظ أن :

$$x_5 = \frac{33}{32} \; , \; x_4 = \frac{17}{16} \; , \; x_3 = \frac{9}{8}$$

كما أن :

$$\begin{aligned}\delta^2 x_4 &= x_5 - 2x_4 + x_3 \\ &= \frac{33}{32} - 2\left(\frac{17}{16}\right) + \frac{9}{8} = \frac{33 - 68 + 36}{32} = \frac{1}{32}\end{aligned}$$

و أن :

$$(x_5 - x_4)^2 = \left(\frac{33}{32} - \frac{17}{16}\right)^2 = \left(\frac{1}{32}\right)^2$$

وبذلك فإن :

$$\frac{(x_5 - x_4)^2}{\delta^2 x_4} = \left(\frac{1}{32}\right)^2 \div \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$$

وعليه نرى أن قيمة نهاية المتتابعة a هي:

$$a = x_5 - \frac{(x_5 - x_4)^2}{\delta^2 x_4} = \frac{33}{32} - \frac{1}{32} = \frac{32}{32} = 1$$

ويمكن التحقق من ذلك لو دققنا في حدود المتتابعة حيث نرى أن :

$$x_n = \frac{2^n + 1}{2^n} \quad , \quad n = 1,2,3,4,..........$$

وبذلك فإن :

$$a = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{2^n + 1}{2^n}\right) = 1$$

3.2 الفرق المقسم

حتى الآن اعتدنا على استخدام قيم للمتغير x متساوية التباعد ولكن يمكننا أيضا استخدام أي قيم لـ x. أي أنه ليس من الضروري أن تكون x متساوية التباعد. وفي مثل هذه الحالات نستعمل مؤثراً جديداً و هو المؤثر الفرقي المقسم. ونبدأ بالتعريفات الضرورية التالية:

يعرف الفرق المقسم الأول لـ y_o و y_1 من خلال العلاقة:

$$f(x_o, x_1) \equiv [x_o, x_1] = \frac{(y_o - y_1)}{x_o - x_1} = \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} \qquad ...... (2.43)$$

ومباشرة نستنتج من (2.43) أن:

$$y_o = y_1 + (x_o - x_1)[x_o, x_1] \qquad ...... (2.44)$$

بالمثل يعطي الفرق المقسم الثاني لـ y_o ، و y_1 ، و y_2 بالعلاقة:

$$[x_o, x_1, x_2] = \frac{\{[x_o, x_1] - [x_1, x_2]\}}{(x_o - x_2)} \qquad ...... (2.45)$$

وتكون y_o معطاة بالمعادلة:

$$y_o = y_1 + (x_o - x_1)[x_1, x_2] + (x_o - x_1)(x_o - x_2)[x_o, x_1, x_2] \qquad ...... (2.46)$$

عموماً نعرف الفرق المقسم النوني (من الرتبة n) بالعلاقة:

$$[x_o, x_1, x_2, ..., x_n] = \frac{\{[x_o, x_1, ..., x_{n-1}] - [x_1, x_2, ..., x_n]\}}{(x_o - x_n)} \qquad ...... (2.47)$$

كما نستطيع أن نستنتج أن:

$$\begin{aligned} y_o = y_1 &+ (x_o - x_1)[x_1, x_2] + (x_o - x_1)(x_o - x_2)[x_1, x_2, x_3] + ... \\ &+ (x_o - x_1).....(x_o - x_{n-1})[x_1, .., x_n] \qquad ...... (2.48) \\ &+ (x_o - x_1)(x_0 - x_1)..(x_o - x_n)[x_o, x_1, .., x_n] \end{aligned}$$

يمكننا أيضاً، وكما سبق بالنسبة للفروق الأمامية، إثبات أن تطبيق الفرق المقسم النوني على كثير حدودية من الدرجة n يؤدي إلى ثابت. ذلك يتجلى من معالجة الدالة x^m، حيث أن الفرق المقسم الأول هو :

$$[x, x_1] = \frac{(x^m - x_1^m)}{(x - x_1)} = x^{m-1} + x_1 x^{m-2} + ... + x_1^{m-1}$$

وهي حدودية من الدرجة $m-1$.

الآن من المعادلة (2.48)، نرى أنه لو لائمنا الدالة y بحدودية $f(x)$ من الدرجة $n-1$ فإنه يمكننا كتابه y على الصورة:

$$y = f(x) + (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)[x, x_1, ..., x_n] \qquad ...... (2.49)$$

وحيث $f(x)$ معطاة بالعلاقة:

$$\begin{aligned} f(x) = y_1 + (x - x_1)[x_1, x_2] + ... \\ + (x - x_1)......(x - x_{n-1})[x_1, ..., x_n] \end{aligned} \qquad ...... (2.50)$$

مثال (7.2)

إذا كانت $y = \frac{1}{x}$ و $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ و $x_3 = 3$ فقم بملائمة y بحدودية من الدرجة الثانية. ما هي ملاحظاتك؟

الحل:

نلاحظ أن $y_1 = \frac{1}{1}$ و $y_2 = \frac{1}{2}$ و $y_3 = \frac{1}{3}$ وبذلك نكون الجدول الفرقي – الجدول (8.2) - لنجد بأن:

$$f(x) = y_1 + (x-1)[1,2] + (x-1)(x-2)[1,2,3]$$
$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{3}(x-1)(x-2)$$
$$f(x) = -\frac{1}{6} + \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}x^2$$

الجدول (8.29) -المثال (7.2).

x	y	$[x_1, x_2]$	$[x_1, x_2, x_3]$
1	1		
		$1/2$	
2	$\frac{1}{2}$		$-1/3$
		$-1/6$	
3	$\frac{1}{3}$		

ونلاحظ هنا أنه أمكننا تمثيل دالة ؛لا تمت للحدوديات بأي صلة وهي $\frac{1}{x}$ ؛ بحدودية من الدرجة الثانية.

كما نلاحظ أنه لو حسبنا $f(x)+(x-1)(x-2)(x-3)[x,1,2,3]$ فإننا نصل إلى الدالة الأصلية $y=\frac{1}{x}$.

للتحقق من ذلك دعنا نحسب الحد:

$$(x-1)(x-2)(x-3)[x,1,2,3]$$

ولكي نقوم بذلك نحسب $[x,1,2,3]$ وهذا هو :

$$[x,1,2,3]=\frac{[x,1,2]-[1,2,3]}{x-3}$$
$$\Rightarrow (x-3)[x,1,2,3]=[x,1,2]+1/3$$

ولكن:
$$[x,1,2]=\frac{[x,1]-[1,2]}{(x-2)}$$

عليه فإن:

$$(x-2)(x-3)[x,1,2,3]=[x,1]-[1,2]+\tfrac{1}{3}(x-2)=\frac{y-1}{x-1}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}(x-2)$$

و هذا يؤدي إلى:

$$(x-1)(x-2)(x-3)[x,1,2,3]=y-1-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{3}(x-1)(x-2)$$

و بذلك نحصل على:

$$y=f(x)+(x-1)(x-2)(x-3)[x,1,2,3]=\frac{1}{x}$$

مثال (8.2)

إذا كانت النقاط الموالية تمر بحدودية من الدرجة الثانية فأستخدم الفرق المقسم (المعادلة (2.50)) لإيجاد صيغة الحدودية المذكورة.والنقاط هي : (0,4) و(1,5) و (-1,5).

الحل

نكون الجدول الفرق المقسم [الجدول (9.2)] ثم نحسب $f(x)$ لنجد أن :

$$f(x)=5+(x+1)[-1,1]+(x+1)(x-1)[-1,1,0]$$
$$f(x)=5+(x+1)(0)+(x+1)(x-1)(1)=x^2+4$$

وحيث نلاحظ أن h ليست ثابتة هنا.

ونلاحظ أيضاً أنه حتى لو استعملنا أكثر من ثلاثة نقاط فإننا نتوصل إلى نفس الإجابة وهذا ما نوضحه كما يلي:

الجدول (9.2)-المثال (8.2)

x	y	$[x_i, x_{i+1}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
-1	5		
		0	
1	5		1
		1	
0	4		

لتكن النقاط المارة بالحدودية هي: (4,20) و (0,4) و (1,5) و (-1,5).

نكون الجدول الفرقي المقسم بالجدول (10.2).

الجدول (10.2)-المثال(8.2) بنقطة إضافية

x	y	$[x_i, x_{i+1}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	
-1	5			
		0		
1	5		1	
		1		0
0	4		1	
		4		
4	20			

الآن نوجد $f(x)$ وحيث نرى أن:

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 + (x+1)[-1,1] + (x+1)(x-1)[-1,1,0] + (x+1)(x-1)(x-0)[-1,1,0,4] \\ &= 5 + (x+1)(0) + (x^2-1)[1] + x(x^2-1)(0) \\ &= x^2 + 4 \end{aligned}$$

وهكذا نرى أنه قد توصلنا إلى نفس النتيجة .

في ختام هذا الفصل نشير إلى امتداد مبرهنة برول؛ ونترك برهانها كتمرين للطالب، وذلك لكي نكتب y في صيغتها النهائية باستخدام هذه المبرهنة والنتيجة التي توصلنا إليها سابقاً بالمعادلة (2.49).

امتداد مبرهنة برول

إذا كانت $f(x)$ دالة حقيقية ومعرفة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للتفاضل k من المرات في $[a,b]$ فإنه يوجد عدد $\zeta \in (a,b)$ بحيث يكون:

$$[x, x_1, \ldots\ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!}$$

باستخدام هذه المبرهنة والمعادلة (2.49) يمكننا كتابة y على الصورة:

$$y = f(x) + (x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots.(x-x_n)\frac{y^{(n)}(\zeta)}{n!}$$

وحيث :

$$i = 0,1,\ldots\ldots,n \quad ; \quad \zeta \in [\min x_i , \max x_i]$$

تمارين (2)

1. أثبت صحة ما يلي:

(أ) $\Delta(c) = 0$ وحيث c ثابت.

(ب) $\nabla(x) = h$.

(ج) $\nabla^3(a x^2) = 0$ وحيث a ثابت، ماذا عن قيم المؤثر الفرقي من رتبة أعلى من 3.

2. أثبت أن $\nabla^{n+1} P_n(x) = 0$ و حيث $P_n(x)$ حدودية من الدرجة n.

3. كون الجدول الفرقي للدالة x^4 وذلك باستخدام القيم $x = 0,0.1,0.2,0.3,0.4$، ثم أمده حتى $x = 1$ وذلك باستخدام خصائص المؤثرات الفرقية الأمامية أو الخلفية.

4. ما هي درجة الحدودية الممثلة بالبيانات التالية:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	6	13	32	69	130	221

5. ما هي صيغة الحدودية التي تمر بالنقاط التالية:

(6,11) ، (4,0) ، (2,7) ، (0,10). أحسب $P(8)$.

6. إذا كان $y = x^n$ و $h = 1$ فأثبت أن $\Delta^n y = n!$.

7. كون الجدول الفرقي للدالة $\sqrt{x}$ للقيم $1 \le x \le 5$ بحيث تكون $h = 1$ مرة و $h = \frac{1}{2}$ مرة أخرى. قارن أعمدة الفروق الثانية بالجدولين.

.8

9. ما هي الحدودية التي تمر بالنقاط:

(0,7) , (0.1,7.164) , (0.2,7.272) , (0.3,7.348) , (0.4,7.416) , (0.5,7.5)

10. كون الجدول الفرقي لقيم y المعطاة أسفله.

k	0	1	2	3	4	5	6
y_n	0	1	16	81	256	625	1296

11. أوجد وصحح الخطأ الوحيد بالقيم التالية:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
y_k	0	0	1	6	24	60	120	210

12. استعمل الخواص الخطية للمؤثر الفرقي لإثبات أنه في حالة $y_k = k^3$ فإن $\Delta y_k = 3k^2 + 3k + 1$ و $\Delta^2 y_k = 6k + 6$. ما هي ملاحظاتك؟

13. أثبت أنه إذا كان $y_k = c^k$ فإن $\Delta y_k = e^k(c-1)$.

14. أثبت أن : $\Delta(\sin k) = 2\sin\frac{1}{2}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)$.

15. احسب القيم الناتجة لـ y_k من الفروق الأولى المعطاة:

k	0	…	…	…	…	…	…
Δy_k		1	2	4	7	11	16

16. أثبت أن $\mu\delta y_n = \delta\mu y_n = \frac{1}{2}\left(y_{n+1} - y_{n-1}\right)$.

17. إذا كان x_n هو مجموع n من الحدود الأولى للمتسلسلة:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} ....$$

فطبق أسلوب δ^2 على S_6 و S_7 و S_8. قارن النتيجة التي تحصلت عليها بالعدد $\pi/4$.

18. أوضح أن $\delta \equiv \Delta(1+\Delta)^{-\frac{1}{2}} \equiv \nabla(1+\nabla)^{-\frac{1}{2}}$.

19. أثبت ما يلي:

(أ) $\Delta^3 y_o = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_o$.

(ب) $\delta^4 y_o = y_2 - 4y_1 + 6y_o - 4y_{-1} + y_{-2}$

20. أثبت أن $\mu\delta$ و $\Delta\left(1+\frac{1}{2}\Delta\right)(1+\Delta)^{-1}$ متكافئتان وذلك باستعمال المؤثر E.

21. أثبت أنه إذا كان $P(x) = x^2 + 2x$ فإن $[x, x_1, x_2]$ مقدار ثابت لأي قيمة x. [x_1 و x_2 نقطتان ثابتتان].

22. خذ في الاعتبار الدالة $y = \frac{1}{x^2}$ ، ولو أن $x = 1$، $x_2 = 2$ و $x_3 = 3$. فقم بملائمة الدالة لحدودية من الدرجة الثانية. ثم تحقق من أن $y = \frac{1}{x^2}$ باستعمال المعادلة (**2.49**).

الفصل الثالث

الاستكمال

يحتوي هذا الفصل على:

- 1.3 تقديم.
- 2.3 قانون نيوتن الفرقي الأمامي.
- 3.3 قوانين أخرى.
- 4.3 حدودية لاجرانج الاستكمالية.

1.3 تقديم

تتلخص عملية الاستكمال (أو التوليد) في أنها تلك العملية التي تقوم بتقدير قيمة y التي تماثل (أو تناظر) قيمة جديدة للمتغير x وذلك باستخدام قيم y المعلومة لمجموعة من قيم x. وهذه العملية لابد وأن تتم بناء على أسس متينة وليس بشكل اعتباطي أو بمجرد النظر والتخمين. ولنؤكد على ذلك دعنا نضرب المثال التالي:

مثال (1.3)

لو أن $y(0)=0$ و $y(1)=2$ و $y(2)=4$ و $y(5)=10$ فإنه ربما نقاد للاعتقاد بأن $y(3)=6$ أو أن $y(4)=8$ ، أي أنه ربما اعتقدنا بأن الدالة هي $y(x)=2x$.

ولكن هذا غير صحيح دائماً، فالعلاقة:

$$y(x)=2x+x(x-1)(x-2)(x-5)$$

تعطى القيم المذكورة أعلاه والمعطاة ولكن $y(3)=-6$ و $y(4)=-16$ ،أي أن $y(3)\neq 6$ و $y(4)\neq 8$.

من المثال السابق نرى أننا بحاجة إلى معلومات كافية حتى نحصل على الجواب الصحيح؛ وهذا هو بالضبط ما نقوم به في عملية الاستكمال. والاستكمال نوعان استكمال داخلي وخارجي وبذلك نعني استكمال الجدول من الداخل أو من الخارج؛ أي بمعنى أن x تقع داخل مدى الجدول الفرقي أو خارجه. وعموماً سوف نستعمل دائماً كلمة الاستكمال وكفى.

نبدأ أولاً بالاستكمال الخطي كتمهيد للموضوع وحيث نهمل الفروق الثانية وما

أرقى منها في هذه الحالة تكون y_p ، والتي تمثل قيمة y المناظرة لقيمة x التي نسعى لمعرفة y المقابلة لها؛ أي أن $y_p = y(x_p)$ ، معطاة بالعلاقة:

$$y_p = y_o + p\,\Delta\,y_o \qquad \text{...... (1.3)}$$

وحيث $x_p = x_o + p\,h$

والاستكمال الخطي ما هو إلاّ حالة خاصة من قانون نيوتن الفرقي الأمامي كما سنرى في البند الموالي ولا نعتد به كثيراً في حساباتنا.

مثال (2.3)

لو حسبنا $y = e^x$ لعدة قيم من x وأردنا حساب y عند $x = 2.01$، فإننا نرى من الجدول (1.3) أسفله أن:

$h = 0.2$، $x_o = 2.00$ و $x_p = 2.01$ وبذلك فإن $p = \frac{1}{2}$ ، عليه باستخدام الاستكمال الخطي نحصل على: y

$$y_p = 7.3891 + \frac{1}{2}(0.1492) = 7.4637$$

وحيث نلاحظ أن $\Delta\,y_o = 0.1492$.

الجدول (1.3) – المثال (2.3)

x	$y = e^x$	Δy
2.00	7.3891	
		0.1492
2.02	7.5383	
		0.1523
2.04	7.6906	

مثال (3.3)

لو كانت لديك البيانات الموالية: $(0,1), (1,2), (2,5), (3,10)$ أحسب $y(1.5)$ باستعمال الاستكمال الخطي.

الحل:

نكون الجدول (2.3) أسفله ونلاحظ أن $x_o = 0$ و $x_p = 1.5$ كما أن $h = 1$ ، بذلك فإن : $p = 1.5$ ، كما أن $\Delta y_o = 1$ و $y_o = 1$ عليه فإن:

$$y(1.5) = y_o + \Delta y_o = 1 + (1.5)(1) = 2.5$$

الجدول (2.3) - الجدول فرقي للمثال (3.3)

x	y	Δy
0	1	
		1
1	2	
		3
2	5	
		5
3	10	

في هذا المثال يمكن أيضا اعتبار أن $x_o = 2$ و $y_o = 2$ وبذلك فإن $p = \frac{1}{2}$ ونرى أن :

$$y(1.5) = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)3 = 3.5$$

وهكذا نرى التفاوت في النتيجتين وهو أمر يدعو إلى الدهشة. ولكن هذه الدهشة سوف تزول إذا ما تذكرنا بأن الاستكمال الخطي ما هو إلاّ تقريب أولي؛ كما أن اختيارنا يجب أن يكون بحيث:

$$0 < |p| < 1 \qquad \text{...... (2.3)}$$

ولهذا المثال لو قمنا بإيجاد صيغة الحدودية الممثلة لهذه البيانات فإننا سوف نحصل على : $y = 1 + x^2$ وبذلك فإن $y(1.5) = 3.25$ وهي القيمة الدقيقة والمتوقعة. ونرى أيضا أن القيمة المحسوبة باستخدام $y_o = 2$ و $p = \frac{1}{2}$ أقرب إلى هذه القيمة. وهذا يتمشى مع العلاقة (2.3).

مما تقدم وكما ذكرنا سابقاً سوف لن نعتد كثيراً بطريقة الاستكمال الخطي.

2.3 قانون نيوتن الفرقي الأمامي

لقد سبق وأن رأينا بالفصل الثاني أن:

$$y(x) = f(x) + (x - x_1)(x - x_2)........(x - x_n)\frac{y^{(n)}(\zeta)}{n!} \qquad \text{...... (3.3)}$$

وحيث أن $f(x)$ معطاة بالعلاقة:

$$\begin{aligned} f(x) = y_1 + (x - x_1)[x_1, x_2] + ... \\ + (x - x_1)...(x - x_n)[x_1, x_2, ..., x_n] \end{aligned} \qquad \text{...... (4.3)}$$

ولو أننا نستطيع إهمال $y^{(n)}(\zeta)$ فإنه يمكننا حساب $y(x)$ لأي قيمة x في الفترة المطلوبة.

لنركز الآن على الحالة التي يكون فيها $x = x_1 + nh$ $(n = 0,1,2,........)$ ؛ أي أن قيم x متساوية التباعد. عندئذ نستطيع حساب الفروق المقسمة كالآتي:

$$[x_1, x_2] = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2) = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = \Delta y/h \qquad ......(5.3)$$

و

$$[x_1, x_2, x_3] = \frac{[x_2, x_3] - [x_1, x_2]}{x_1 - x_3} = \frac{\frac{\Delta y_2}{h} - \frac{\Delta y_1}{h}}{2h} = \frac{\Delta^2 y_1}{2!h^2} \qquad ......(6.3)$$

و

$$[x_1, x_2, ..., x_{r+1}] = \frac{\Delta^r y_1}{r!h^r} \qquad ......(7.3)$$

ولو كانت القيمة المراد حساب الدالة y عندها هي $x_p = x_1 + ph$ ؛ فإن:

$$(x - x_1) = (x_p - x_1) = (x_1 + ph - x_1) = ph \qquad ......(8.3)$$

و

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2) &= (x_1 + ph - x_1)(x_1 + ph - x_1 - h) \\ &= ph(p-1)h = p(p-1)h^2\end{aligned} \qquad ......(9.3)$$

و

$$(x - x_1)(x - x_2)....(x - x_r) = p(p-1)....(p - r + 1)h^r \qquad ......(10.3)$$

وهكذا .....

وباستخدام المعادلات (5.3) - (7.3) و المعادلات (8.3) - (9.3) والتعويض بها في (3.3) مع الأخذ في الاعتبار (3.4) نحصل على:

$$\begin{aligned} y_p &= y_1 + p\,\Delta y_1 + p(p-1)\frac{\Delta^2 y_1}{2!} + \ldots\ldots \\ &+ \frac{p(p-1)\ldots(p-n+2)\Delta^{n-1} y_1}{(n-1)!} \\ &+ \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)h^n}{n!}\, y^{(n)}(\zeta) \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (11.3)$$

ولنبين الكيفية التي وصلنا بها إلى المعادلة (11.3) استنادا للمعادلات المذكورة سابقاً نرى (مثلا) أن:

$$\begin{aligned} (x-x_1)(x_1-x_2)[x_1, x_2, x_3] &= p(p-1)h^2\left(\frac{\Delta^2 y_1}{2!\,h^2}\right) \\ &= \frac{p(p-1)\Delta^2 y_1}{2!} \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (12.3)$$

وبالمثل نصل إلى صيغ مماثلة بالنسبة إلى بقية الحدود.

والعلاقة (11.3) هي ما نسميها بصيغة (أو قانون) نيوتن للفروق الأمامية. ويمثل الحد الأخير ما نسميه بالمتبقي ويمكن إهماله إذا ما كانت $y^{(n)}(\zeta)$ صغيرة جداً.

ملاحظات:

1. يعطى مفكوك $(1+\Delta)^p y_1$ قيمة y_p ولكن بدون متبقي، أي في شكل متسلسلة لانهائية.

2. يكون المتبقي مساوياً للصفر في الحالة التي تكون فيها البيانات ممثلة لحدودية. في هذه الحالة تكون المتسلسلة منتهية وعدد حدودها يعتمد على درجة الحدودية.

3. يستخدم قانون نيوتن عادة عندما يكون $0 < p < 1$ وذلك حتى يتم الحصول على تقارب سريع.

مثال (4.3)

أعد حل المسألة بالمثال السابق (3.3) باستعمال قانون نيوتن الفرقي الأمامي.

الحل:

من البيانات المعطاة نكون الجدول الفرقي الأمامي أسفله، وندرس هنا الحالتين:

أولاً:

لو أن $y_1 = 1$، عندئذ $p = 1.5$ ومن الجدول (3.3) أو قانون نيوتن الفرقي الأمامي نجد أن:

$$\begin{aligned} y_p &= y(1.5) \\ &= y_1 + (1.5)\Delta y_1 + \frac{(1.5)(1.5-1)}{2}\Delta^2 y_1 \\ &= 1 + (1.5)(1) + \frac{(1.5)(0.5)}{2}(2) \\ &= 3.25 \end{aligned}$$

الجدول (3.3) – المثال (4.3)

y	Δy	$\Delta^2 y$
1		
	1	
2		2
	3	
5		2
	5	
10		

ثانياً:

لو أن $y_1 = 2$ ، عندئذ $p = 0.5$ ، كما أن:

$$y_p = y_1 + p\,\Delta y_1 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 y_1$$
$$= 2 + (0.5)(3) + \frac{(0.5)(0.5-1)}{2}(2) = 3.5 - 0.25 = 3.25$$

وهكذا نرى أنه قد تحصلنا على نفس النتيجة وهي النتيجة المتوقعة للحالتين.. غير أنه لابد من التنويه بأن استخدام p بحيث تحقق المتباينة (2.3) هو الذي يقود إلى الإجابة المطلوبة والصحيحة.

نلاحظ هنا أيضاً بأن قانون نيوتن الفرقي الأمامي قاد إلى الإجابة المتوقعة والصحيحة. وهذا يوضح أهمية وقوة هذا القانون.

مثال (5.3)

قيست المسافة الرأسية y لجسم ساقط تحت تأثير الجاذبية بدلالة الزمن فكانت كما هو معطى بالجدول المرافق، احسب المسافة y عندما $t = 0.2\,s$.

الجدول (4.3) – قيم المسافة الرأسية لجسم ساقط

t(s)	0	2	4	6	8
y(m)	0	19.6	78.4	176.4	313.6

الحل:

نكون الجدول الفرقي (5.3) ونلاحظ أن $h = 2$ $t_p = 0.2$ و $t_1 = 0$، بذلك فإن $p = \dfrac{t_p - t_1}{h} = 0.1$ ومن الجدول الفرقي نرى أن $y_1 = 0$ و $\Delta y_1 = 19.6$ و $\Delta^2 y_1 = 39.2$ بذلك ومن قانون نيوتن الفرقي الأمامي نجد أن:

$$y_p = y(0.2) = y_1 + p\,\Delta y_1 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 y_1$$

الجدول (5.3) – المثال (5.3)

y	Δy	$\Delta^2 y$
0		
	19.6	
19.6		39.2
	58.8	
78.4		39.2
	98.0	
176.4		39.2
	137.2	
313.6		

أي أن:

$$y_p = y(0.1) = 0 + (0.1)(19.6) + \frac{(0.1)(0.1-1)}{2} 39.2$$
$$= 1.96 - 1.764 = 0.196\ m$$

مرة أخرى، وحيث أن الجدول يدلل على أن البيانات ممثلة لحدودية من الدرجة فإنه يمكننا إيجاد صيغتها، ولو قمنا بذلك فإننا نحصل على: $y = 4.9\,t^2$ ولو عوضنا بالقيمة $t = 0.2$ فإننا نحصل على $y = 0.196\ m$ وهي نفس النتيجة التي تم التوصل إليها باستعمال قانون نيوتن الأمامي.

3.3 قوانين أخرى

في هذا البند نعطي بعض القوانين الأخرى ذات العلاقة بالاستكمال؛ غير أننا لن نعطي إلا برهان قانون بيسل وذلك لتوضيح الكيفية التي يتم بها التوصل إلى هذه القوانين. وهذه القوانين هي:

[أ] قانون جاوس الأمامي

في هذه الحالة تكون y معلومة لعدد $(2n+1)$ من النقاط وهي تلك عند $x_0, x_{\pm1}, x_{\pm2}, \ldots\ldots x_{\pm n}$. بنفس الطريقة نحسب الفروق المقسمة على النحو:

$$[x_0, x_1] = \frac{\delta\, y_{1/2}}{h} \qquad \ldots\ldots (13.3)$$

و

$$[x_o, x_1, x_2] = \frac{\delta^2 y_1}{(2!\, h^2)} \qquad \text{...... (14.3)}$$

و ...... إلخ.

وباستخدام العلاقات (8.3) - (10.3) نحصل على:

$$y_p = y_o + p\,\delta\, y_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} p(p-1)\delta^2 y_o + (p+1)p(p-1)\frac{\delta^3}{3!} y_{\frac{1}{2}} + ... \qquad \text{...... (15.3)}$$

وهو قانون جاوس الأمامي.لاحظ أننا نستخدم هنا الفروق المركزية.

[ب]قانون جاوس الخلفي

بنفس الطريقة المذكورة آنفاً نستطيع أن نكتب قانون جاوس الخلفي والذي ينص على :

$$y_p = y_o + p\,\delta\, y_{-\frac{1}{2}} + \binom{p+1}{2}\delta^2 y_o + \binom{p+1}{3}\delta^3 y_{-\frac{1}{2}} + ... \qquad \text{...... (16.3)}$$

وحيث $\binom{n}{r}$ هي معاملات ذات الحدين، أي أن $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

[ج] قانون سترلنج

لو استعملنا مرة أخرى النقاط عند $x_0, x_{\pm 1}, x_{\pm 2}, ...x_{\pm n}$ وصيغة مماثلة للصيغة (4.3) فإننا نستطيع أن نكتب y على الصورة:

$$y_p = y_o + (x - x_0)[x_o, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_{-1}, x_o, x_1] + (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)[x_{-1}, x_o, x_1, x_2] + (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_{-2}, x_{-1}, x_o, x_1, x_2] + \ldots \quad ...... (17.3)$$

وبحساب الحدود $(x - x_0)$ و $(x - x_0)(x - x_1)$ و $(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)$ و ...... إلخ.

وكذلك الحدود المضروبة فيها على النحو:

$$[x_o, x_1] = \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} = \frac{\delta\ y_{1/2}}{h} \quad ...... (18.3)$$

و

$$[x_{-1}, x_o, x_1] = \frac{[x_{-1}, x_o] - [x_o, x_1]}{x_{-1} - x_1} = \frac{\delta^2\ y_o}{2!\,h^2} \quad ...... (19.3)$$

و

$$[x_{-1}, x_o, x_1, x_2] = \frac{\delta^3\ y_{1/2}}{3!\,h^3} \quad ...... (20.3)$$

و

$$[x_{-2}, x_{-1}, x_o, x_1, x_2] = \frac{\delta^4\ y_0}{4!\,h^4} \quad ...... (21.3)$$

وبالتعويض في (17.3) نحصل على:

$$y_p = y_o + p\,\mu\,\delta\ y_o + p^2 \frac{\delta^2 y_o}{2!} + p(p^2 + 1)\frac{\mu\delta^3}{3!} y_o + p^2(p^2 - 1)\frac{\delta^4}{4!} y_o + p(p^2 - 1)(p^2 - 4)\frac{\mu\delta^5}{5!} y_o + \ldots. \quad ...... (22.3)$$

وحيث استعملنا العلاقات:

$$\mu\delta\ y_o = \frac{1}{2}\left(\delta\ y_{\frac{1}{2}} + \delta\ y_{-\frac{1}{2}}\right) \qquad \text{...... (23.3)}$$

و

$$\mu\delta^3\ y_o = \frac{1}{2}\left(\delta^3\ y_{\frac{1}{2}} + \delta^3\ y_{-\frac{1}{2}}\right) \qquad \text{...... (24.3)}$$

والعلاقة (22.3) هي ما نسميها بقانون سترلنج.

ويستعمل هذا القانون خاصة عندما يكون $-\frac{1}{4} < p < \frac{1}{4}$.

مثال (6.3)

لو كانت لديك البيانات الموالية فاستعمل قانون سترلنج لحساب $y(0.1)$، تحقق من صحة إجابتك. والبيانات هي:

$$(0,1), (\pm 1,2), (\pm 2,5)$$

الحل:

نلاحظ هنا أن $h = 1$ و $x_p = 0.1$ و $x_o = 0$ وبذلك فإن $p = \frac{x_p - x_o}{h} = 0.1$، نكون الجدول الفرقي المركزي (6.3) أسفله لنرى أن:

$\delta\ y_{\frac{1}{2}} = 1$ و $\delta\ y_{-\frac{1}{2}} = -1$ وبذلك فإن:

$$\mu\delta\ y_o = \frac{1}{2}(1 + (-1)) = 0$$

وكذلك نرى أن:

$$\delta^2 \; y_o = 2$$

ومن قانون سترلج نجد أن:

$$y_p = y(0.1) = y_o + (0.1)\mu\delta \; y_o + (0.1)^2 \frac{\delta^2 y_o}{2!}$$

$$= 1 + (0.1)(0) + (0.01)\left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1.01$$

الجدول (6.3) - المثال (6.3)

y	y	$\delta y_{1/2}$	$\delta^2 \; y_o$
-2	5		
		-3	
-1	2		2
		-1	
0	1		2
		1	
1	2		2
		3	
2	5		

الآن لو قمنا بإيجاد صيغة الحدودية الممثلة لهذه البيانات والتي هي من الدرجة الثانية، كما هو واضح من العمود الأخير من الجدول (6.3)، فإننا نحصل على: $y = 1 + x^2$ وبالتعويض عن $x = 0.1$ نجد أن: $y = 1.01$. وهكذا نرى أن قانون سترلج أعطانا النتيجة المتوقعة، وهو بذلك من القوانين المهمة والفعالة.

ننوه هنا وفي ختام هذا البند بأن مجموعة القوانين التي قدمنا لها ونحن بصدد دراسة الاستكمال ما هي إلا أمثلة على سبيل الذكر لا الحصر. وسوف نكتفي بهذا القدر لنتجه إلى دراسة أسلوب للاستكمال يعتبر الأعم و الأشمل وهو استخدام حدودية لاجرانج الاستكمالية ذات n من النقاط.

4.3 حدودية لاجرانج الاستكمالية

تعتبر هذه الطريقة معالجة مختلفة في الاستكمال وذلك من ناحية الأسلوب والشمولية حيث أنها تصلح لأي قيم في x متساوية التباعد أو غير ذلك.

فلو أنه كانت لدينا n من النقاط وهي :

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)........, (x_n, y_n)\}$$

فإننا نكون الحدوديات (من الدرجة $n-1$) التالية:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots\cdots(x-x_n)}{(x-x_1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(x-x_n)} \qquad ......\ (25.3)$$

وحيث نلاحظ أن عدد الحدود بالبسط هو $n-1$ وللحدودية $L_i(x)$ لا يوجد الحد $(x-x_i)$ والسبب واضح من صيغة المقام بالحدودية. ونلاحظ أن عدد الحدوديات من النوع (25.3) هو n، ذلك لأن $i = 1,2,......., n$.

كما نلاحظ أن $L_i(x_j) = 0$ عندما $i \neq j$. وأن $L_i(x_i) = 1$، أي أن:

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad ......\ (26.3)$$

كذلك نرى أنه لو كونا الحدودية:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) y_i \qquad ......\ (27.3)$$

فإن:

$$L(x_j) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x_j) y_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} y_i = y_j$$

لكل $j = 1,2,....n$.

وبذلك نستطيع كتابة $y = L(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) y_i$ ؛ ونلخص ما توصلنا إليه كما يلي:

((يمكن تمثيل أي مجموعة نقاط بحدودية من الدرجة $n-1$ وحيث n هو عدد النقاط، وتعطى صيغة الحدودية بالعلاقة (27.3))).

أي أن النقاط المعطاة تمر بحدودية من الشكل (27.3). و $L(x)$ المعرفة بالمعادلة (27.3)؛ وهي ما نسميها بحدودية لاجرانج ذات n من النقاط. وهي صالحة لأي مجموعة من قيم x بغض النظر عن تباعدها.

نلاحظ أيضا أن الحدودية (27.3) صالحة للاستعمال لأي دالة y . هذا يعني إمكانية تطبيقها على الدالة $y = k$ (وحيث k ثابت)، هذا يعني أن:

$$L(x) = k = k \sum_{i=1}^{n} L_i(x) \qquad ...... (28.3)$$

(تذكر بأن $y_i = k$ لكل i). عليه فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i(x) = 1 \qquad \text{...... (29.3)}$$

(لقد وضعنا $L(x) \equiv k$؛ ذلك لأنها حدودية من الدرجة 0 وتمر بـ n من النقاط كل y_i لها ثابتة)

والعلاقة (29.3) تعطى اختبارا جيداً عن مدى صحة حساباتنا.

مثال (7.3)

أوجد صيغة الحدودية التي تمر بالنقاط $(-2,5)$ و$(0,1)$ و $(-1,2)$

ثم احسب y المناظرة لـ $x = +1$.

الحل:

نضع $x_1 = -2$ و$y_1 = 5$ ، $x_2 = 0$ و$y_2 = 1$ و $x_3 = -1$ و$y_3 = 2$. ثم نحسب L_1 , L_2 وL_3.

وذلك على النحو التالي:

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x+1)}{(-2-0)(-2+1)} = \frac{1}{2}(x^2 + x)$$

و

$$L_2(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{(0+2)(0+1)} = \frac{1}{2}(x^2 + 3x + 2)$$

و

$$L_3(x) = \frac{(x+2)(x-0)}{(-1+2)(-1-0)} = -x^2 - 2x$$

ومن هذه نحسب:

$$\begin{aligned} y &= y_1L_1 + y_2L_2 + y_3L_3 \\ &= \frac{5}{2}\left(x^2 + x\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + 3x + 2\right) + 2\left(-x^2 - 2x\right) \\ &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

وهذه هي الصيغة المطلوبة، كما أن $y(1) = 1^2 + 1 = 2$.

لاحظ أن : $\sum_{i=1}^{n} L(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + x\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + 3x + 2\right) + \left(-x^2 - 2x\right) = 1$

مثال (8.3)

أعد الحسابات لنفس المثال السابق لو أن نفس الحدودية تمر بالنقطة $(2,5)$. ماذا تلاحظ؟

الحل:

نحسب $L_i(x)$ لنجد أن:

$$L_1(x) = -\frac{1}{8}\left(x^3 - x^2 - 2x\right) \quad \text{و} \quad L_2(x) = -\frac{1}{4}\left(x^3 - x^2 - 4x - 4\right)$$

$$\text{و} \; L_3(x) = \frac{1}{3}\left(x^3 - 4x\right) \quad \text{و} \quad L_4(x) = \frac{1}{24}\left(x^3 + 3x^2 + 2x\right)$$

ومنها ومن قيم y نجد أن:

$$y = L(x) = 5L_1 + L_2 + 2L_3 + 5L_4 = x^2 + 1$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها بالمثال السابق. وهي نتيجة تبعث على الإعجاب

بهذا الأسلوب المتقن والذي يؤكد على أن ((**الحدودية الممثلة ببيانات ما تحمل نفس الصيغة بغض النظر عن زيادة عدد النقاط المارة بها إذا ما استعملنا حدودية لاجرانج.**))

ونظراً لأهمية حدودية لاجرانج الاستكمالية فإننا سوف تعطي مثالاً مفصلاً عنها باستعمال الحاسوب.

مثال (9.3)

أكتب برنامجاً حاسوبياً يحسب حدودية لاجرانج للبيانات الموضحة بالجدول المرافق وذلك عند $x = 4$. ارسم المخطط الانسيابي للمسألة (علماً بأن الحدودية هي من الدرجة الثانية). والبيانات هي:

x	0	2	3	5	1
y	-1	3	8	24	0

الحل:

يمكننا ببساطة رسم المخطط الانسيابي بشكل عام كما هو موضح بالشكل (1.3) وحيث نرى أن الخوارزمية تنساب كما يلي:

أولاً : إدخال البيانات.

ثانياً: حساب $L_i(x)$ مع وضع شرط على قيم i و j عند حسابها حسب التعريف.

ثالثاً: حساب $y = L(x)$.

رابعاً: طباعة النتائج.

خامساً: التوقف.

وانطلاقاً من الشكل (1.3) واستنادا إلى خطوات الخوارزمية نقوم بكتابة البرنامج، وسوف نقوم هنا بإعطاء الحسابات مستخدمين عدة لغات.

فالشكل (2.3) يعطي برنامج الحسابات بلغة بيسك، والشكل (3.3) أ،ب يعطيان نتائج البرنامج وحيث يوضح الشكل (3.3) أ قيمة الحدودية عند $x=4$ عند أخذ ثلاثة نقاط في الحسابات بينما نحصل على نفس القيمة $(y=15)$ إذا ما استعملنا خمسة نقاط (الشكل (3.3)ب).

ونلاحظ من المخطط الانسيابي أنه تمت الإشارة إلى المتغيرات بـ X وY و LX و XP و YP وذلك للتعبير عن النقاط (X,Y) وعن الحدوديات $L_i(x)$ وعن $x=x_p$ المطلوب حساب y عندها وهي y_p.

نعطي أيضا نفس الحسابات باستعمال لغة فوتران (90) [الشكلان (4.3) و(5.3)]؛ وكذلك بلغة بيسك المرئية [الشكلان (6.3) و(7.3)].

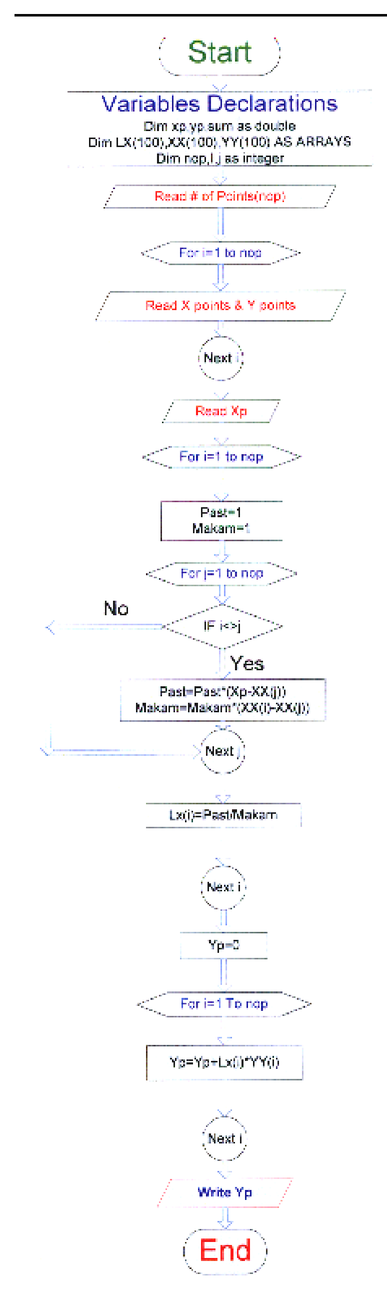
مثال (10.3)

مستخدماً البيانات أسفله؛ استعمل حدودية لاجرانج لحساب y عند $x=4$. استخدم أحدى لغات البرمجة في حساباتك. والبيانات هي:

x	0	3	1	2
y	1	28	2	9

الحل:

هنا نكتب البرنامج بلغة C لنحصل على $y(4)=65$ كما هو موضح بالشكلين (8.3) و(9.3).



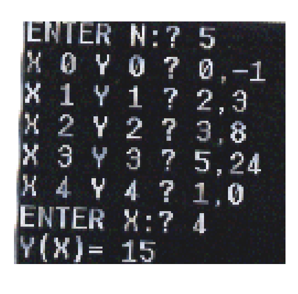
الشكل (1.3)- المخطط الانسيابي للمثال (9.3)

```
INPUT "ENTER N:";N
N=N-1
DIM X(N), Y(N)
FOR I=0 TO N
PRINT "X"; I; "Y"; I;
INPUT X(N), Y(N)
P=0
FOR I=0 TO N
L=1
FOR J=0 TO N
IF I <> J THEN
L=L*(XX-X(J))/(X(I)-X(J))
END IF
NEXT
P=P+Y(I)*L
NEXT
PRINT "Y(X)=";P
END
```

الشكل (2.3)- المثال (9.3) بلغة بيسك.

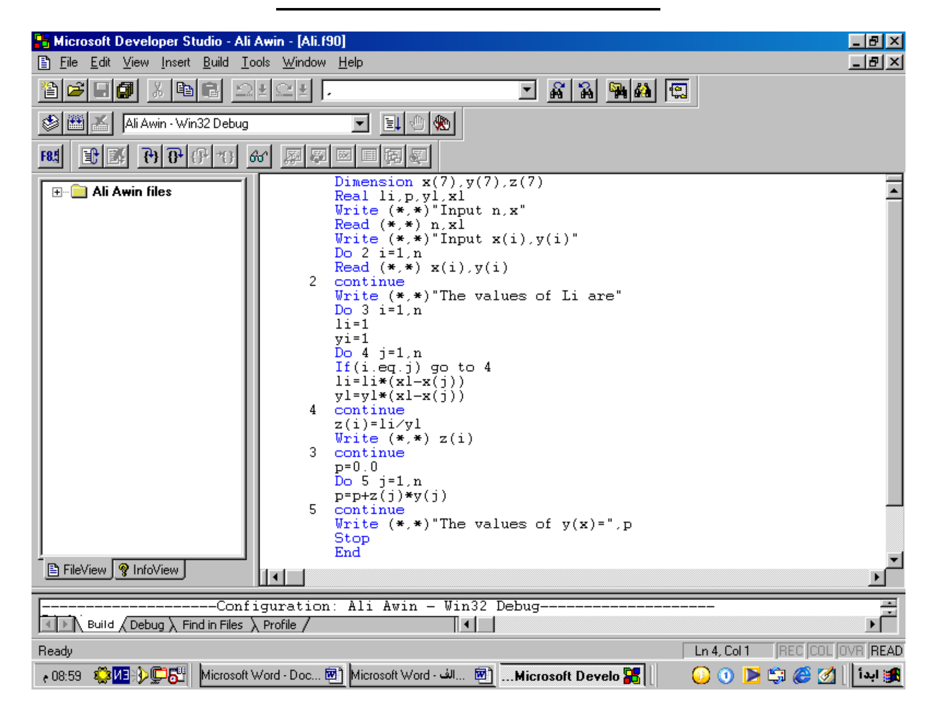
```
ENTER N:? 3
X 0 F 0 ? 0,-1
X 1 F 1 ? 2,3
X 2 F 2 ? 3,8
ENTER X:? 4
Y(X)= 15
```

(أ)

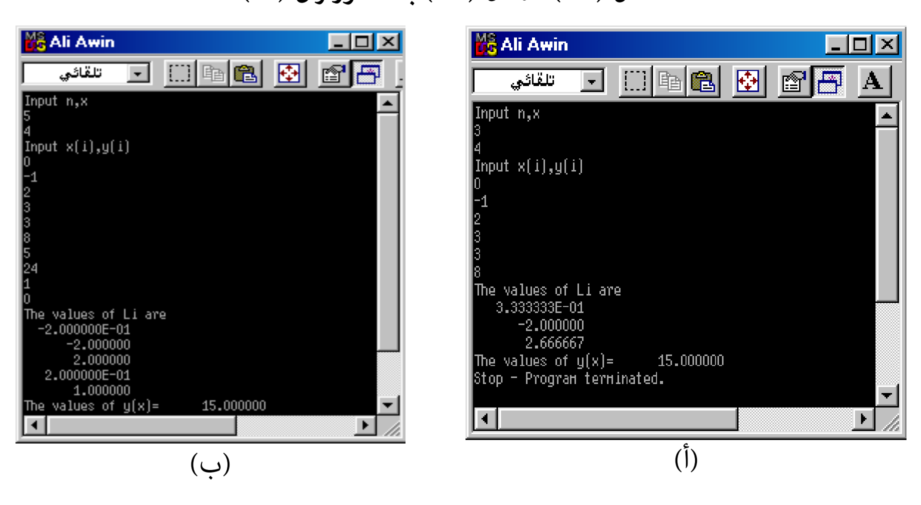


(ب)

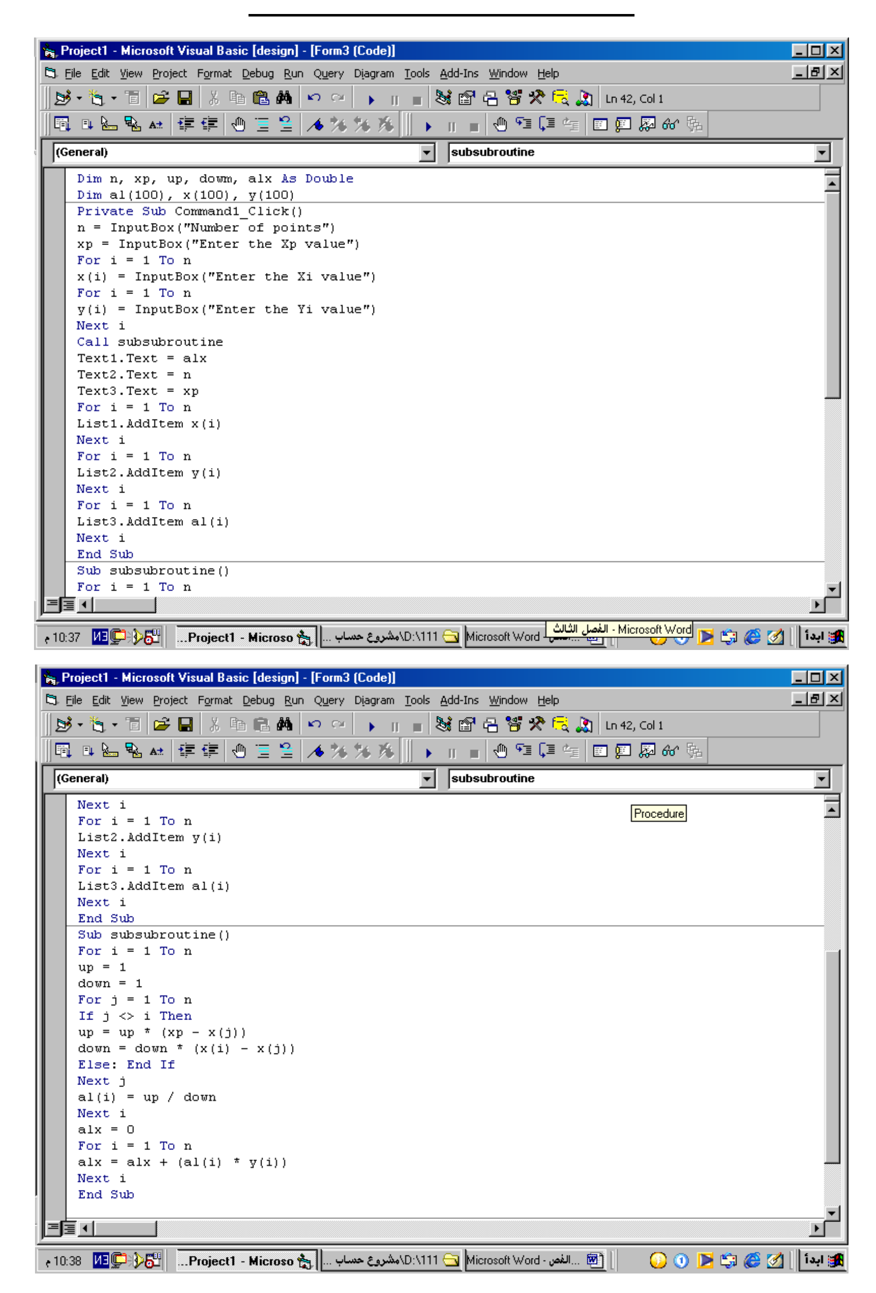
الشكل (3.3)- نتائج المثال (9.3) بلغة بيسك.



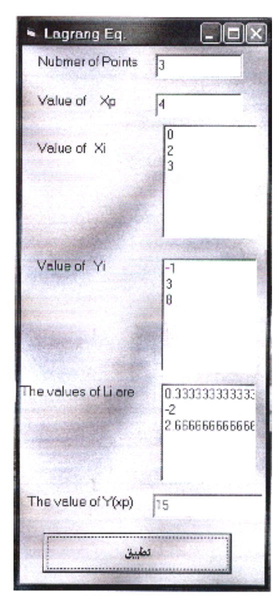
الشكل (4.3)- المثال (9.3) بلغة فورتران (90).



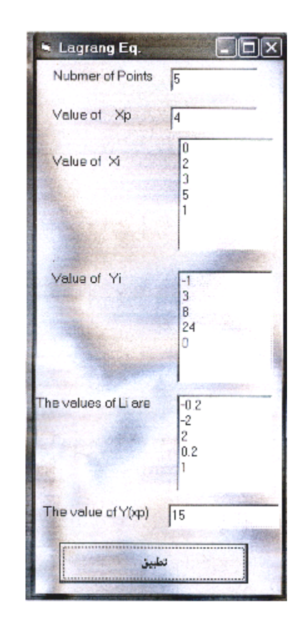
الشكل (5.3)- نتائج المثال (9.3) بلغة فورتران (90).



الشكل (6.3)- المثال (9.3) بلغة بيسك المرئية.



(أ)



(ب)

الشكل (7.3)- نتائج المثال (9.3) -لغة بيسك المرئية.

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#define m 10
void main() {

  int i,j,n;
  float X[m],Y[m],L[m],Xc,Yc,Lc;
  clrscr();
  printf(" ENTER NUMBER OF POINTS ");
  scanf("%d",&n);
   printf(" ENTER THE POINTS\N ");
  for(i=0;i<n;i++)  scanf("%f%f",&X[i],&Y[i]);
  scanf("%f",&Xc) ;
  for(i=0;i<n;i++) {
     Lc=1.0;
  for(j=0;j<n;j++) {
      if(j!=i)
     {
    L[i]=Lc*(Xc-X[j])/(X[i]-X[j]);
        Lc=L[i];
        }
                      }

          }
  clrscr();
        printf("  i          X[i]           Y[i]           L[i]
L[i]*Y[i]\n\n");
       Yc=0.0;
   for(i=0;i<n;i++)  {
        printf("%3d%15f%15f%15f%15f\n",i+1,X[i],Y[i], L[i],L[i]*Y[i]);
        Yc=Yc+L[i]*Y[i];  }
        printf("\n          Xc            Yc\n");
        printf("%18f%15f",Xc,Yc);
                         }
```

الشكل (8.3)- المثال (10.3) بلغة C.

i	X[i]	Y[i]	L[i]	L[i]*Y[i]
1	0.000000	1.000000	-1.000000	-1.000000
2	3.000000	28.000000	1.000000	112.000000
3	1.000000	2.000000	4.000000	8.000000
4	2.000000	9.000000	-6.000000	-54.000000

Xc	Yc
4.000000	65.000000

الشكل (9.3)- نتائج المثال (10.3) بلغة C.

ومن المهم ملاحظة أن البرمجة التي أعطيت للحدودية كانت عامة؛ أي أنها تصلح لأي عدد من النقاط وهذا ما يجب فعله عند كتابة أي برنامج. أي أن البرنامج يجب أن يتصف بالعمومية أو الشمولية حتى يكون مفيداً في كل الحالات.

نلاحظ أيضا أنه يمكن القيام بالاستكمال العكسي وحيث نعني بذلك أن نعين قيمة x المناظرة لقيمة ما y إذا ما كانت لدينا بيانات كافية ننطلق منها. أي أنه لو أردنا حساب x المناظرة لقيمة ما من y (أي أننا نعتبر y هي المتغير المستقل و x هي المتغير التابع) فإننا نستعمل الحدودية الاستكمالية التالية:

$$L(y) = \sum_{i=1}^{n} L_i(y) x_i \qquad ...... (30.3)$$

ونحسب قيمة x المناظرة لأي قيمة y.

تمارين (3)

1. استعمل مؤثر الإزاحة للحصول على قانون الاستكمال الخطي.

2. احسب قيمة $x^3 - 6x^2 + 12x$ عند $x = 1,2,3$، استعمل هذه القيم والاستكمال الخطي وقانون نيوتن الفرقي الأمامي لحساب قيمة الدالة عند $x = 1.5$. قارن بالقيمة المباشرة؟

3. ماذا عن قيمة الدالة عند $x = 2\frac{1}{2}$ للمثال السابق؟

4. كون الجدول الفرقي لقيم $\sin x$ لـ:

$$x = 0\ ,\ 5\ ,\ 10\ ,\ 15\ ,\ 20\ ,\ 25\ ,\ 30$$

وذلك باستعمال ست أرقام عشرية، ثم استخدم قانون سترلنج لحساب $\sin 14^o$.

5. استعمل الجدول أسفله وحدودية لاجرانج لحساب $f(5)$:

x_i	0	2	4	6
$f(x_i)$	10	7	0	-11

6. اشرح كيف يمكنك استخدام متسلسلة تايلور للاستكمال. [أنظر إلى مفكوك الدالة $f(x+t)$].

7. للمسألة 5، هل يمكنك استخدم قانون نيوتن الفرقي الأمامي؟ اشرح!

8. بافتراض أن الحدودية $\varphi(n)$ هي من الدرجة n وتمر بـ $(n+1)$ من النقاط:

$$(x_o, \varphi(x_o)) \quad , \quad (x_1, \varphi(x_1)) \quad ,.........., \quad (x_n, \varphi(x_n))$$

وأنه يمكن كتابتها على الصورة:

$$\varphi(x) = a_o + a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)(x - x_1) + ...$$
$$+ a_n(x - x_o)(x - x_1)........(x - x_n)$$

قم باشتقاق قانون نيوتن-جريجوري الفرقي الخلفي:

$$\varphi(x_o - ph) = \varphi(x_o) + p\nabla\varphi_o + \frac{p(p+1)}{2!}\nabla^2\varphi_o + ...$$
$$........ + \frac{p(p+1)(p+2)....(p+n-1)}{n!}\nabla^n\varphi_o$$

9. قم باشتقاق الصيغ المختلفة للاستكمال التي وردت بالكتاب ولم يتم اشتقاقها.

10. باستخدام البيانات أسفله، أكتب برنامجاً حاسوبياً يحسب $y(6)$ ؛ علماً بأن الدالة تكعيبية في صيغتها. والبيانات هي:

x	-1	-3	3	2	1	7
y	0	-26	28	9	2	344

استخدم أربع نقاط ثم كل النقاط. قارن وناقش.

الفصل الرابع

التفاضل والتكامل العدديان

يحتوي هذا الفصل على:

1.4 التفاضل العددي

لو عدنا قليلا للوراء لنذكر بمتسلسلة تايلور ووضعنا $\Delta x = h$ وقمنا بفك y_1 بدلالة y_o فإننا نحصل على:

$$y_1 = y_o + h\,D\,y_o + \frac{h^2}{2!}D^2\,y_o + ... + \frac{h^n}{n!}D^n\,y_o + ... \qquad ......\ (1.4)$$

وحيث تعني: $D^2\,y_o = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right)_o$ و $D\,y_o = \left.\frac{dy}{dx}\right)_o$

....وهكذا.

ويمكن كتابة (1.4) على الصورة:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n D^n}{n!}\,y_o \qquad ......\ (2.4)$$

(مرة أخرى نلاحظ أن $D^n\,y_o = \left(\frac{d^n y}{dx}\right)_{x=x_o}$)

الآن لو أجزنا كتابة المعادلة (2.4) على النحو:

$$y_1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n D^n}{n!}\right) y_o \equiv e^{hD}\,y_o \qquad ......\ (3.4)$$

فإنه يتضح بأن $E \equiv e^{hD}$ وذلك لأن $y_1 = E\,y_o$ ؛ مرة أخرى نغض الطرف ونأخذ لوغاريتم الطرفين للعلاقة $E \equiv e^{hD}$ لنحصل على $\ln E = h\,D$، أي أن:

$$h\,D = \ln(1+\Delta) = \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\Delta^n}{n} \qquad ......\ (4.4)$$

وهذه العلاقة، رغم أننا توصلنا إليها بطريقة رياضية غير سليمة،هي علاقة دقيقة

وصحيحة وتربط بين المؤثر التفاضلي D والمؤثر الفرقي الأمامي Δ. بالطبع هذه العلاقة تصلح فقط عند النقطة (x_o , y_o) وهي بذلك علاقة خاصة. وللحصول على علاقة سليمة رياضيا وعامة، أي أنها تصلح عند أي نقطة (x_p , y_p) نستعمل قانون نيوتن الفرقي الأمامي كما سنوضحه بعد قليل.

نلاحظ أيضا من العلاقة $E = e^{hD}$ ومن العلاقة $E = (1-\nabla)^{-1}$ أنه يمكننا التوصل إلى علاقة مماثلة للعلاقة (4.4) ولكن الآن بين D و ∇، وهذه العلاقة تأخذ الشكل:

$$hD = \nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nabla^n}{n} \qquad ......\ (5.4)$$

الآن بالرجوع إلى قانون نيوتن الفرقي الأمامي ولنأخذ في الاعتبار $y_p = y(x_p)$؛ ذلك القانون ينص على أن:

$$\begin{aligned} y_p &= y_o + p\,\Delta y_o + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 y_o + ... \\ &= y_o + p\,\Delta y_o + \frac{1}{2}\left(p^2 - p\right)\Delta^2 y_o + \frac{1}{6}\left(p^3 - 3p^2 + 2p\right)\Delta^3 y_o + ... \end{aligned} \qquad ......\ (6.4)$$

ونلاحظ أن هذه المتسلسلة نهائية عند التعامل مع بيانات ممثلة لحدودية من الدرجة n.

نفاضل العلاقة (6.4) بالنسبة إلى p لنحصل على:

$$\frac{dx_p}{dp} = \frac{dy(x_p)}{dp} = \frac{dy}{dx_p}\cdot\frac{dx_p}{dp} = hy'_p \qquad ......\ (7.4)$$

وحيث نلاحظ أن:

$$\frac{dx_p}{dp} = \frac{d}{dp}(x_o + ph) = h \qquad ......\ (8.4)$$

كما أن $\left(= \frac{dy_p}{dx}\right) y'_p = \frac{dy_p}{dx_p}$.

عليه بإجراء عملية التفاضل على طرفي المعادلة (6.4) نحصل على:

$$h\,y'_p = \Delta\, y_o + \left(p - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_o + \left(\frac{1}{2}p^2 - p + \frac{1}{3}\right)\Delta^3 y_o + ... \qquad ......\ (9.4)$$

هذه العلاقة عامة وتصلح لأي y_p ؛ ولكن إذا أردنا التفاضل عند x_o. فإننا نضع $p = 0$ لنحصل على نفس العلاقة السابقة (4.4) التي حصلنا عليها بطريقة رياضية غير سليمة؛ وما نحصل عليه عندما نضع $p = 0$ هو :

$$h D\, y_o = \Delta\, y_o - \frac{1}{2}\Delta^2 y_o + \frac{1}{3}\Delta^3 y_o + ... \qquad ......\ (10.4)$$

نستطيع أيضا أن نحصل على علاقة مماثلة بين D و ∇ إذا استخدمنا العلاقة الاستكمالية:

$$y_p = y_o + p\nabla\, y_o + \binom{p+1}{2}\nabla^2 y_o + \binom{p+2}{3}\nabla^3 y_o + ... \qquad ......\ (11.4)$$

مثال (1.4)

لديك البيانات أسفله، احسب $D\,y_o$ والبيانات هي:

x	1	2	3	4	5
y	0	3	8	15	24

الحل:

نلاحظ هنا أن $x_o = 1$ و $y_o = 0$ و$h = 1$ كما أنه عندما نكون الجدول الفرقي (1.4) نحصل على $\Delta y_o = 3$ و $\Delta^2 y_o = 2$ و$\Delta^3 y_o = 0$ و$\Delta^4 y_o = 0$ و.....الخ.

وبذلك فإن:

$$D\, y_o = \frac{1}{1}\left(3 - \frac{1}{2}(2) + 0\right) = 2$$

الجدول (1.4) – المثال (1.4)

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0			
	3		
3		2	
	5		0
8		2	
	7		0
15		2	
	9		
24			

ونلاحظ هنا أننا استخدامنا العلاقة (10.4) للحصول على y'_o .

مثال (2.4)

لنفس البيانات السابقة بالمثال (1.4) احسب $y(1.5)$.

الحل:

هنا نرى أن $x_p = 1.5 = 1 + p(1)$

وهذا يعني أن $p = \frac{1}{2}$ وباستخدام الجدول الفرقي (1.4) والقانون (9.4) نحصل على:

$$1 \cdot y'(1.5) = 3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)2 + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot 0 = 3$$

أي أن:

$$y'(1.5) = 3$$

مثال (3.4)

هل يمكنك التحقق من صحة إجاباتك بالمثالين السابقين.

الحل:

الإجابة هي بنعم، وذلك على النحو التالي:

حيث أن $x_o = 1$ و$h = 1$ومن الجدول (1.4) نرى أن البيانات تمثل حدودية من الدرجة الثانية، عليه نسعى لمعرفة صيغتها، وهو أمر سهل كما تعلمنا من الفصل الثاني. وصيغتها هي:

$$y(x) = y_o + \frac{(x-1)}{1}\Delta y_o + \frac{(x-1)}{1}\left(\frac{x-1}{1}-1\right)\frac{\Delta^2 y_o}{2}$$
$$= 0 + (x-1)\cdot 3 + (x-1)(x-2)\frac{2}{2}$$
$$= 3x - 3 + x^2 - 3x + 2 = x^2 - 1$$

الآن للتأكد من صحة تفاضلاتنا في المثالين السابقين نفاضل مباشرة ونعوض لنرى أن:

$$y'(x) = 2x$$

ومنها نجد أن $y'(1) = 2$ و $y'(1.5) = 3$ ؛ وهما النتيجتان اللتان تم التوصل لهما بالمثالين باستعمال التفاضل العددي.

حتى الآن حصلنا على صيغ للتفاضل باستخدام Δ و ∇، لكنه يمكننا أيضا استعمال δ و μ أيضا. ذلك نوضحه كما يلي:

من العلاقة $E = e^{hD}$ ومن تعريف δ نرى أن:

$$\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}hD} - e^{-\frac{1}{2}hD}$$

$$\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}hD} - e^{-\frac{1}{2}hD} = 2\sinh\left(\frac{1}{2}hD\right) \qquad \text{...... (12.4)}$$

ولكن عندما $0 < x < 1$ يمكننا فك $\sinh^{-1} x$ لنحصل على:

$$\sinh^{-1} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 \qquad \text{...... (13.4)}$$

عليه من العلاقتين (12.4) و(13.4) نرى أن:

$$hD = 2\sinh^{-1}\left(\delta/2\right) = 2\left(\frac{1}{2}\delta - \frac{\delta^3}{48} + \frac{3\delta^5}{1280} + ...\right) \qquad ...... (14.4)$$

أي أن:

$$hD\, y_{1/2} = \delta\, y_{1/2} - \frac{\delta^3}{24} y_{1/2} + \frac{3\delta^5}{640} y_{1/2} + ... \qquad ...... (15.4)$$

ملاحظة 1:

يمكننا أيضا أثبات أن:

$$h\, y'_o = \mu\delta\, y_o - \frac{1}{6}\mu\,\delta^3 y_o + \frac{1}{3}\mu\,\delta^5\, y_o ...... \qquad ...... (16.4)$$

ونترك برهان ذلك للقارئ المهتم.

ملاحظة 2:

إن الدقة في إجراء عملية التفاضل العددي التي قدمنا لها تعتمد إلى حد كبير على اختيار h وهو الحال في معظم حساباتنا الفرقية.

مثال (4.4)

إذا أعطيت بأن $y_{-2} = 0\ ,\ y_{-1} = 3\ ,\ y_o = 8\ ,\ y_1 = 15\ ,\ y_2 = 24$ وأن قيم x المناظرة لها هي $\{1,2,3,4,5\}$. فاحسب y'_o باستخدام العلاقة (16.4). ما هي ملاحظاتك؟

الحل:

$h = 1$ وبذلك فإن:

$$y'_o = \mu\delta\, y_o - \frac{1}{6}\mu\,\delta^3 y_o + ...$$

ولكن:

$$\mu\delta\, y_o = \frac{1}{2}\left(y_1 - y_{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(15 - 3\right) = \frac{12}{2} = 6$$

كما أن:

$$\begin{aligned}
\mu\,\delta^3 y_o &= \mu\,\delta\left(\delta^2 y_o\right) = \mu\,\delta\left(y_1 - 2y_o + y_{-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(y_2 - y_o\right) + \frac{1}{2}\left(-2y_1 + 2y_{-1}\right) + \frac{1}{2}\left(y_o - y_{-2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(24 - 30 + 6 - 0\right) = 0
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن:

$$y'_o = 6$$

ومما توصلنا إليه بالمثال السابق من صيغة الحدودية الممثلة لهذه البيانات نرى أن $y'_o = y'(3) = 2 \times 3 = 6$ وهي نفس الإجابة التي تحصلنا عليها باستخدام العلاقة (16.4).

2.4 قوانين وقواعد التكامل العددي

لإشتقاق قوانين التكامل سنحصل أولاً على صيغة تكامل y من x_o إلى x_1؛ نفعل ذلك بإجراء عملية التكامل بالنسبة إلى p ؛ وذلك نوضحه كما يلي:

$$\int_{x_o}^{x_1} y\, dx = \int_o^1 y(x_o + ph)h\, dp = h\int_o^1 y_p dp \qquad ...... (17.4)$$

الآن لو استخدمنا قانون نيوتن الفرقي الأمامي والمعادلة (17.4) لحصلنا على:

$$\frac{1}{h}\int_{x_o}^{x_1} y\, dx = \int_o^1 \left(y_o + p\,\Delta y_o + \frac{(p^2 - p)}{2}\Delta^2 y_o + ...\right) dp$$

$$= \left[py_o + \frac{p^2}{2}\Delta y_o + \frac{1}{2}\left(\frac{p^3}{3} - \frac{p^2}{2}\right)\Delta^2 y_o + ...\right] \qquad ...... (18.4)$$

$$= y_o + \frac{1}{2}\Delta y_o - \frac{1}{12}\Delta^2 y_o + \frac{1}{24}\Delta^3 y_o - \frac{19}{720}\Delta^4 y_o$$

يمكن أيضا أن نستخدم القانون الفرقي الخلفي لنحصل على:

$$\frac{1}{h}\int_{x_o}^{x_1} y\, dx = y_o + \frac{1}{2}\nabla y_o + \frac{5}{12}\nabla^2 y_o + ... \qquad ...... (19.4)$$

هذه ببساطة الكيفية التي نقوم فيها بحساب التكامل باستخدام الفروق الأمامية والخلفية. في البند الموالي نوضح استعمال الفروق المركزية لنحصل على قوانين مهمة في التكامل العددي.

1.2.4 قانون جاوس – إنك

لو استخدمنا الفروق المركزية وقانون بيسل للاستكمال الذي قدمنا له بالفصل السابق ولو قمنا بإجراء عملية تكامل مماثلة كما قمنا به في بداية البند السابق فإننا نحصل على:

$$\frac{1}{h}\int_{x_o}^{x_1} y\, dx = \frac{1}{2}(y_o + y_1) - \frac{1}{12}\,\mu(\delta\, y_1 - \delta\, y_0) + \frac{11}{720}\mu(\delta^3 y_1 - \delta^3 y_0) + .. \quad ......\ (20.4)$$

ولو طبقنا هذه الصيغة للفترات $(x_o, x_1), (x_1, x_2)$ و.....و (x_{n-1}, x_n) ثم جمعنا المعادلات الناتجة لحصلنا على:

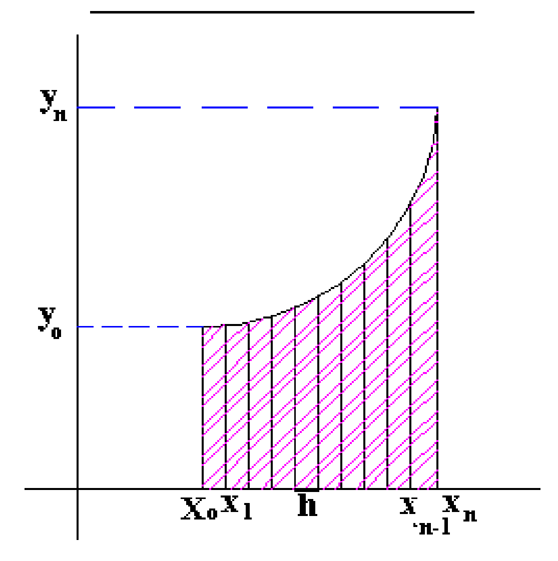
$$\int_{x_o}^{x_n} y\, dx = \frac{h}{2}(y_o + 2y_1 + .. + 2y_{n-1} + y_n) - \frac{h}{12}\,\mu(\delta\, y_n - \delta\, y_0) + \frac{11h}{720}\mu(\delta^3 y_n - \delta^3 y_0) + ... \quad ......\ (21.4)$$

والصيغة (21.4) هذه تسمى بقانون جاوس – إنك.

كما يمثل الحد الأول في هذا القانون قاعدة شبه المنحرف ويرمز له بالرمز ($T.T.$). هذا الحد هو:

$$T.T. = \frac{h}{2}(y_o + 2y_1 + .. + 2y_{n-1} + y_n) \quad ......\ (22.4)$$

وسمي هذا الحد بحد شبة المنحرف لعلاقة هذا الحد بالمساحة تحت منحنى الدالة التي نريد تكاملها كما هو موضح بالشكل (1.4). وهو يمثل تقريب أولي للدالة في نطاقها.



الشكل (1.4) حد شبة المنحرف كتقريب أولي لتكامل الدالة.

2.2.4 قانون جريجوري

حيث أن $\mu\delta = \frac{1}{2}\left(E^{1} - E^{-1}\right)$ فإن $\mu\delta = \frac{1}{2}\left(1 + \Delta - (1 - \nabla)\right)$ أي أن $\mu\delta = \frac{1}{2}(\Delta + \nabla)$ كما أنه يمكن كتابة $\mu\delta^{3}$ بنفس الكيفية بدلالة Δ و ∇ من رتب عليا، عليه لو قمنا بالتعويض في قانون جاوس – إنك لحصلنا على:

$$\int_{x_o}^{x_n} y\, dx = \frac{h}{2}\left(y_o + 2\left(y_1 + .. + y_{n-1}\right) + y_n\right) + \frac{h}{12}\left(\Delta y_o - \nabla y_n\right)$$
$$- \frac{h}{24}\left(\Delta^{2} y_o + \nabla^{2} y_n\right) + \frac{19}{720} h\left(\Delta^{3} y_o - \nabla^{3} y_n\right) \qquad ...... (23.4)$$
$$- \frac{3}{160} h\left(\Delta^{4} y_o + \nabla^{4} y_n\right)$$

وتمثل هذه الصيغة قانون جريجوري وهو قانون مهم وسوف يمكننا من استخراج عدة قواعد مهمة في التكامل العددي.

3.2.4 قاعدة سمبسن

لنأخذ الحالة الخاصة $n=2$ أي أنه لدينا ثلاثة نقاط، عندئذ ومن قانون جريجوري نتوقف عند الحدود المحتوية على ∇^2 أو Δ^2 وبذلك فإن:

$$\begin{aligned}
\int_{x_o}^{x_2} y\,dx &= \frac{h}{2}\left(y_o + 2y_1 + y_n\right) + \frac{h}{12}\left(\Delta y_o - \nabla y_n\right) \\
&\quad - \frac{h}{24}\left(\Delta^2 y_o - \nabla^2 y_n\right) \\
&= \frac{h}{2}\left(y_o + 2y_1 + y_2\right) + \frac{h}{12}\left[y_1 - y_o - \left(y_2 - y_1\right)\right] \\
&\quad - \frac{h}{24}\left[2\left(y_2 - 2y_1 + y_0\right)\right] \\
&= h\left[\frac{6y_o + 12y_1 + 6y_2 - y_o - y_2 + 2y_1 - y_2 + 2y_1 - y_o}{12}\right] \\
&= \frac{h}{12}\left[4y_o + 16y_1 + 4y_2\right] = \frac{h}{3}\left(y_o + 4y_1 + y_2\right)
\end{aligned} \qquad \text{...... (24.4)}$$

وتمثل المعادلة (24.4) قاعدة سمبسن لثلاثة نقاط.وفي الحالة العامة ولأي عدد فردي من النقاط $(2n+1)$؛ تأخذ قاعدة سمبسن الصورة:

$$\int_{x_o}^{x_{2n}} y\,dx = \frac{h}{3}\left[y_o + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + .. + y_{2n-2}\right) + y_{2n}\right] \qquad \text{...... (25.4)}$$

والمعادلة (25.4) هي قاعدة سمبسن لتكامل دالة y ذات $(2n+1)$ من النقاط.

ملاحظة هامة:

تذكر دائماً بأن قاعدة سمبسن لا تصلح إلا لعدد فردي من النقاط.

4.2.4 قواعد أخرى

مرة أخرى لو كان لدينا $n = 3$ فإننا نحسب حتى Δ^3 و ∇^3 في العلاقة (23.4) ولو قمنا بذلك فإننا نصل إلى قاعدة الثلاثة أثمان والتي تنص على :

$$\int_{x_o}^{x_3} y\,dx = \frac{3h}{8}\left[y_o + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right] \qquad \text{...... (26.4)}$$

وهي قاعدة لأربع نقاط. ويمكن أيضا تعميم هذه القاعدة لعدد $4n$ من النقاط ونترك إثبات ذلك للقارئ.

أيضا لو أن $n = 4$ في (23.4) فإن:

$$\int_{x_o}^{x_4} y\,dx = \frac{2h}{45}\left[7y_o + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4\right] \qquad \text{...... (27.4)}$$

وهي قاعدة بول لخمس نقاط.

مثال (5.4)

باعتبار البيانات الموالية، احسب تكامل الدالة الممثلة بهذه البيانات مستخدما ما يلي:

أ. قاعدة شبه المنحرف.

ب. قانون جريجوري.

ج. قاعدة سمبسن.

د. والبيانات هي:

x	0	1	2	3	4
y	0	3	12	27	48

الحل:

أ. حيث أن $h=1$ عليه فإن $T.T.$ لهذه الدالة هو:

$$T.T.=\frac{1}{2}\left(0+2(3+12+27)+48\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(2(42)+2(24)\right)=66$$

ب. نكون الجدول الفرقي (2.4) ومنه نرى أن الدالة الممثلة للبيانات هي حدودية من الدرجة الثانية كما أن: $\Delta y_o=3$ و $\nabla y_n=21$ و $\Delta^2 y_o=\nabla^2 y_n=6$

الجدول (2.4) – المثال (5.4) الفقرة (ب)

y	Δy	$\Delta^2 y$
0		
	3	
3		6
	9	
12		6
	15	
27		6
	21	
48		

ومن قانون جريجوري نجد أن:

$$\int_{x_o}^{x_n} y\,dx = T.T. + \frac{1}{12}\left(\Delta y_o - \nabla y_n\right) - \frac{1}{24}\left(\Delta^2 y_o + \nabla^2 y_n\right)$$
$$= 66 + \frac{1}{12}(3-21) - \frac{1}{24}(6+6)$$
$$= 66 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 64$$

ج. حيث أن عدد النقاط فردي، عليه يمكننا استخدام قاعدة سمبسن ومنها نحصل على:

$$\int_{x_o}^{x_n} y\,dx = \frac{1}{3}\left(0 + 4[3+27] + 2[12] + 48\right) = 64$$

ونتوقع من هذه النتائج أن:

$$\int_{x_o}^{x_n} y\,dx = 64$$

وذلك استنادا إلى ما تحصلنا عليه بالفقرات ب و ج.

أما نتيجة (أ) فهي بكل تأكيد نتيجة تقريبية [لاحظ أن $x_o = 0$ و $x_n = 4$]

مثال (6.4)

هل يمكنك التأكد من صحة إجاباتك بالمثال السابق؟ اشرح بالتفصيل.

الحل:

نعم، يمكننا التأكد من صحة إجاباتنا وذلك كما يلي: من الواضح أن الدالة الممثلة للبيانات هي:

$$y = 3x^2$$

ولو قمنا بتكامل هذه الدالة تكاملا مباشراً فإن:

$$\int_0^4 \left(3x^2\right)dx = \left[x^3\right]_0^4 = 64$$

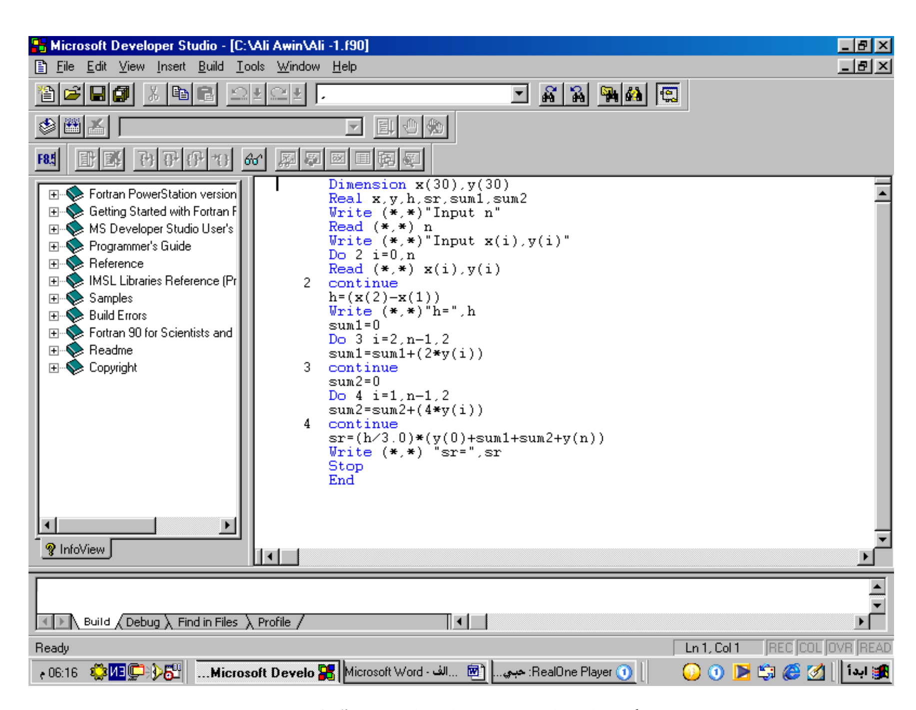
وهذه نفس النتيجة التي تحصلنا عليها باستعمال قانون جريجوري وقاعدة سمبسن.

مثال (7.4)

اكتب برنامجا حاسوبيا يحسب تكامل الدالة الممثلة بالبيانات المعطاة بالمثال (5.4) وذلك باستعمال قاعدة سمبسن.

الحل:

نكتب البرنامج الموضح بالشكل (2.4) باستعمال لغة فورتران لنحصل على النتائج بالشكل (3.4).



الشكل (2.4) – المثال (7.4) – بلغة فورتران.

```
Input n
4
Input x(i),y(i)
0,0
1,3
2,12
3,27
4,48
h=        1.000000
sr=       64.000000
Stop - Program terminated.

Press any key to continue_
```

الشكل (3.4) – المثال (7.4) – النتائج

ويمكن أيضا كتابة البرنامج بلغة بيسك المرئية وحيث نقدم البرنامج بهذه اللغة بالشكل (4.4) ونتيجة البرنامج معطاة بالشكل (4.4).

مثال (8.4)

أكتب برنامجا حاسوبيا يحسب تكامل الدالة الممثلة بالبيانات أسفله وذلك باستعمال قاعدة سمبسن؛ والبيانات هي:

x	0	1	2	3	-4
y	1	4	13	28	49

الحل:

نكتب البرنامج الموضح بالشكل (6.4) بلغة C لنحصل على النتائج الموضحة بالشكل (7.4). أي أن $\int_0^4 y\,dx = 68$.ويمكن التأكد من صحة هذه النتائج من تكامل الدالة مباشرة وحيث نرى أن $y = 3x^2 + 1$.

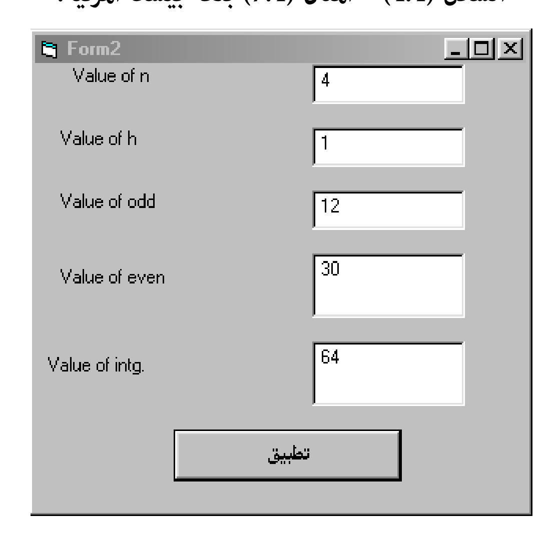
لاحظ أن عدد النقاط في المثالين السابقين فردي.

Project1 - Microsoft Visual Basic [design] - [Form2 (Code)]

```
Function fx(x)
fx = 3 * x ^ 2
End Function
Private Sub Command1_Click()
'simpson methed
Dim a, b, n, odd, h, even, n1, n2, integ As Double
a = 0
b = 4
n = InputBox("value of n")
h = (b - a) / 4
even = 0
odd = 0
k = 1
For k = 1 To n - 1 Step 2
even = even + fx(a + k * h)
If (n2 < 0) Then GoTo 11
Next k
odd = odd + fx(a + k * h)
11: integ = (h / 3) * (fx(a) + fx(b) + 2 * odd + 4 * even)
Next k
Text5.Text = n

End Sub
```

الشكل (4.4) – المثال (7.4) بلغة بيسك المرئية.



الشكل (5.4) – المثال (7.4) –النتائج بلغة بيسك المرئية.

```
#include<iostream.h>
#include<conio.h>
main()
{
clrscr();
const float h=1;
float X[5],Y[5];
cout<<"\nX=";
for(int i=0;i<5;++i)
cin>>X[i];
cout<<"\nY=";
for(i=0;i<5;++i)
cin>>Y[i];
float sum1=0,sum2=0;
for(int l=1;l<4;++l)
if(l%2!=0)
    sum1+=Y[l];
    else
    sum2+=Y[l];
    cout<<"\n sum1="<<sum1<<"\n sum2="<<sum2<<"\nh="<<h;
float I=(h/3)*(Y[0]+(4*sum1)+(2*sum2)+Y[4]);
cout<<"\nI=(h/3)*(Y[0]+(4*sum1)+(2*sum2)+Y[4])";
    cout<<"\n I="<<I;
    }
```

الشكل (6.4) – المثال (8.4) بلغة C.

```
X=0 1 2 3 4

Y=1 4 13 28 49

 sum1=32
 sum2=13
h=1
I=(h/3)*(Y[0]+(4*sum1)+(2*sum2)+Y[4])
 I=68
```

الشكل (7.4) – نتائج المثال (8.4) بلغة C.

مثال (9.4)

للبيانات أسفله، أحسب $\int_0^4 y\,dx$ باستعمال قاعدة سمبسن. والبيانات هي:

X	0	1	2	3	4
Y	5	6	9	14	21

الحل:

نكتب برنامجا حاسوبيا بلغة C كما بالشكل (7.4) لنحصل على $\int_0^4 y\,dx = 41.3333$ أنظر الشكل (8.4) والذي يعطي نتيجة التكامل.

```
                        SIMBSEN.CPP
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>

main()
{
clrscr();
float h,L,y[10],a=0.0,b=0.0,sum1=0.0,sum2=0.0;
int n,i;
clrscr();

printf("Enter The Number Of Points n \n ");
printf("n=");
scanf("%d",&n);
printf(" h=");
scanf("%f",&h);
printf("***************************\n");
for (i=0;i<=n-1;i++)
{
printf("Enter value of y[%d] \n",i);
scanf("%f",&y[i]);
}
for (i=1;i<=n-1;)
{
sum1+=y[i];
i=i+2;
}
a=4*sum1;
for(i=2;i<n-1;)
{
sum2+=y[i];
i=i+2;
}
b=2*sum2;
printf("***************************");
L=h/3*(a+b+y[0]+y[n-1]);
printf("\nThe value of integration =%.3f\n",L);
getch();
return(0);
}
```

الشكل (7.4) – المثال (9.4) بلغة C.

```
Enter The Number Of  Points n
 n =5
 h =1
***************************
Enter  value  of  y[0]
5
Enter  value  of  y[1]
6
Enter  value  of  y[2]
9
Enter  value  of  y[3]
14
Enter  value  of  y[4]
21
***************************
The value of  integration =41.333
```

الشكل (8.4) – نتائج المثال (9.4) بلغة C.

مثال (10.4)

استخدم البيانات بالمثال (9.4) وقاعدة بول لحساب $\int_0^4 y\,dx$.

الحل:

من قاعدة بول وحيث أن عدد النقاط عدد يساوي 5 عليه نجد أن:

$$\int_0^4 y\,dx = \frac{2(1)}{45}\left[7\times 5 + 32(6) + 12(9) + 32(14) + 7(21)\right] = 41.3333$$

وهي نفس النتيجة التي تحصلنا عليها باستعمال قاعدة سمبسن.

3.4 ملاحظات هامة

أ. إن أحد الأمور المهمة هو معرفة مقدار الخطأ في حساباتنا أو تقديره عندما نستعمل أي طريقة. فمثلاً عندما نستعمل طريقة شبة المنحرف نرى أن الخطأ الناتج E_T منها، يحقق المتباينة:

$$\left|E_T\right| \le (b-a)\frac{h^2}{12}\left|f''(x)\right|_{\max} \qquad \text{...... (28.4)}$$

وحيث a و b هما حدود التكامل.

أما عند استخدام طريقة سمبسن فإن الخطأ E_s يحقق المتباينة:

$$\left|E_s\right| \le (b-a)\frac{h^4}{180}\left|f^{(4)}(x)\right|_{\max} \qquad \text{...... (29.4)}$$

وعلى القارئ المهتم إثبات صحة الصيغتين (28.4) و (29.4) وذلك كي يتمكن من فهم أعمق لموضوع الخطأ وتحليله.

ب. إن طريقة شبة المنحرف وطريقة سمبسن للتكامل ما هما إلاّ حالتين من حالات عامة ضمن نطاق ما يسمى بطرق نيوتن- كوتس. ونلاحظ أن في طريقة شبه المنحرف تم تقريب قطع من الدالة $f(x)$ المطلوب تكاملها بخطوط مستقيمة وبالتالي نصل في إجابتنا إلى مجموع من أشباه المنحرفات؛ بينما في طريقة سمبسن يتم تقريب الدالة $f(x)$ بقطوع مكافئية (أي دوال تربيعية في x).

وللحصول على دقة أفضل يمكن تقريب الدالة بحدودية من الدرجة الثالثة أو بمنحنيات من الدرجة الرابعة. وهكذا تقع كل هذه الطرق في قسم كبير يسمى بطرق نيوتن – كوتس.

ونلاحظ أنه في طريقة شبه المنحرف نستخدم نقطتين لكل شبه منحرف [مثلا للأول نستخدم (x_o, y_o) و (x_1, y_1)]؛ بينما في طريقة سمبسن نستخدم ثلاث

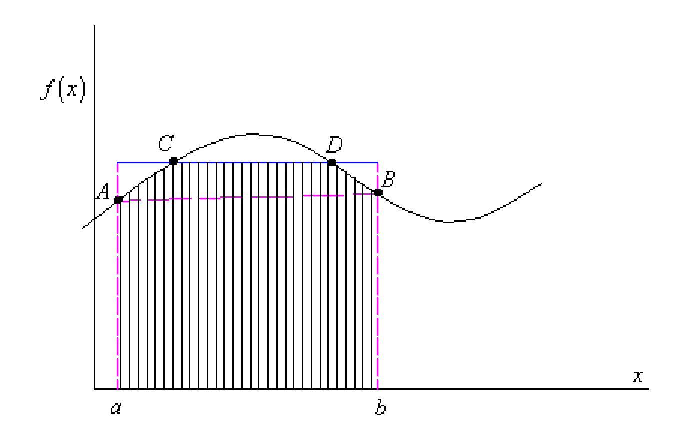
نقاط. وإذا ما اخترنا حدودية من الدرجة الثالثة فإننا نحتاج إلى أربع نقاط وهكذا... كما نلاحظ أيضا أن النقاط متساوية التباعد ؛ أي بطول خطوة ثابت وهو h.

ج. بملاحظة أن $|E_T| \le \frac{(b-a)}{12} Mh^2$ وحيث $M = \left| f^{(2)}(x) \right|_{\max}$ نرى أنه لو وضعنا $d = \frac{(b-a)}{12} M$ فإن $|E_T| \le dh^2$. وبتصغير قيمة h يؤول E_T إلى الصفر. فمثلا لو كان عدد أشباه المنحرفات هو n فإن $h = \frac{(b-a)}{n}$ و بزيادة العدد إلى $2n$ يقل الخطأ بالمعامل 4.

واستنادا إلى هذه الفكرة تم اشتقاق طريقة أدق (أو طريقة تصحيحية) من طريقة شبه المنحرف وتعرف بطريقة رمبرج (Romberg)، وهي طريقة شعبية وتناظر في دقتها طريقة سمبسن.

د. طريقة جاوس للتكامل- تربيعات جاوس (Gauss Quadrature).

تعتبر هذه الطريقة طريقة فعالة، حيث يمكننا استخدامها لأي حالة بغض النظر عن الكيفية التي تعطى بها البيانات، أي متساوية التباعد أو غير متساوية التباعد.. لشرح الكيفية التي تعمل بها الطريقة، دعنا نأخذ في الاعتبار الدالة الموضحة بالشكل (9.4) ،و لو أن المراد هو تعيين المساحة تحت هذا المنحنى الواصل بين A وB، عندئذ نرى أن شبه المنحرف المكون من النقاط B, A, b, a $(abBA)$ يعطى تقريباً للمساحة ولكنه تقريب غير كاف.



الشكل (9.4) – طريقة جاوس.

هنا $h=b-a$ وهي كبيرة. كما أن:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right)=A_1 f(a)+A_2 f(b) \qquad \text{...... (30.4)}$$

وحيث $A_1=A_2=h/2$.

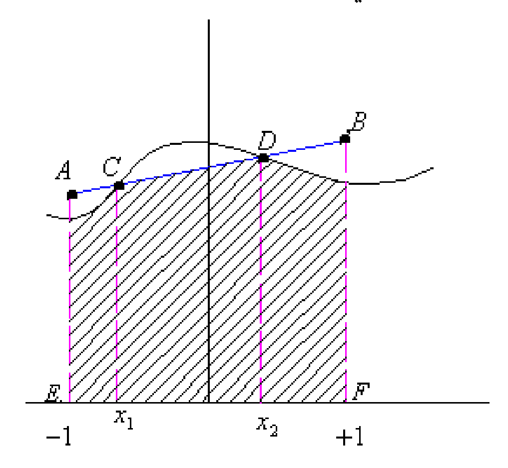
الآن لو اخترنا أي نقطتين داخل الفترة (a,b) وهما C **و** D وأوصلنا هاتين النقطتين بمستقيم ومددناه ليلتقي بالمستقيم $x=a$ و $x=b$ ؛ عندئذ نحصل على شبه المنحرف الموضح بنفس الشكل (9.4). وتتلخص طريقة جاوس في اختيار C و D بحيث نحصل على أحسن تقريب للمساحة تحت المنحنى؛ أي أحسن تقريب لتكامل الدالة a إلى b.

نختار الآن $a=-1$ و $b=+1$ ثم نفترض أن C كانت عند $x=x_1$ و D عند $x=x_2$ ونكون شبه المنحرف الموضح بالشكل (10.4) وهو $EABF$؛ و حيث نلاحظ

أن النقطة C هي $(x_1, f(x_1))$ والنقطة D هي $(x_2, f(x_2))$. نحاكي طريقة شبة المنحرف ونضع:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \qquad \text{...... (31.4)}$$

ثم نحاول إيجاد المجاهيل الأربعة وهي x_1 و x_2 و c_1 و c_2.



الشكل (10.4) طريقة جاوس ($a = +1$ و $b = -1$)

نفترض أيضا أن هذه الطريقة تصلح لعدة دوال بسيطة مثل $y = 1$, $y = x$, $y = x^2$ و $y = x^3$. أي أن هذه الدوال تحقق المعادلة (31.4)، عندئذ نرى أن:

$$\int_{-1}^{+1} 1\, dx = 2 = c_1 + c_2 \qquad \text{...... (32.4)}$$

و

$$\int_{-1}^{+1} x\, dx = 0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 \qquad \text{...... (33.4)}$$

و

$$\int_{-1}^{+1} x^2 \; dx = \frac{2}{3} = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 \qquad ...... (34.4)$$

و

$$\int_{-1}^{+1} x^3 \; dx = 0 = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 \qquad ...... (35.4)$$

وبحل المعادلات (32.4) – (35.4) نحصل على :

$$x_1 = -x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ و } c_1 = c_2 = 1$$

وهكذا نصل إلى صيغة تكامل الدالة المطلوب بطريقة جاوس وذلك كما يلي:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad ...... (36.4)$$
$$= f(-0.57735) + f(0.57735)$$

من المهم ملاحظة أننا عينا حدود التكامل بالعددين $a = -1$ و $b = +1$، إلا إنه يمكننا دائماً القيام بتحويل ما لتغيير حدود فترة التكامل من $[a,b]$ إلى $[-1,+1]$ وهذا التحويل هو من النوع:

$$x = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} x' \qquad ...... (37.4)$$

وحيث $x_1' = -1$ و $x_2' = +1$ ويقابلها $x_1 = a$ و $x_2 = b$.

(فمثلا لو كانت $a = 0$ و $b = 1$ فإن (37.4) تستوجب أن $x_1 = \left(\frac{0+1}{2}\right) + \left(\frac{1-0}{2}\right)(-1) = 0$ و $x_2 = \left(\frac{0+1}{2}\right) + \left(\frac{1-0}{2}\right)(1) = 1$ كما هو متوقع).

وهذا ويمكن تعميم طريقة جاوس لعدة نقاط (أكثر من 2) أي لـ n من النقاط، عندئذ يكون لدينا:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + ... + c_n f(x_n) \qquad ...... (38.4)$$

وفي هذه الحالة يجب تعيين n من $c_i's$ و n من $x_i's$؛ أي يجب تعيين $2n$ من المجاهيل..

والجدول (3.4) يعطي معاملات تربيعات جاوس والإحداثيات السينية للنقاط من 2 إلى 6. [أنظر المراجع].

الجدول (3.4) معاملات تربيعات جاوس والإحداثيات x_i لعدد من النقاط من 2 إلى 6.

عدد النقاط	المعاملات c_i	الإحداثيات x_i
2	$c_1 = c_2 = 1$	$x_1 = -x_2 = -0.57735$
3	$c_1 = c_3 = 0.5$	$x_1 = -x_3 = -0.774597$
	$c_2 = 0.\underline{8}$	$x_2 = 0$
4	$c_1 = c_4 = 0.347855$	$-x_1 = +x_4 = 0.861136$
	$c_2 = c_3 = 0.652145$	$-x_2 = +x_3 = 0.33998$
5	$c_1 = c_5 = 0.236927$	$-x_1 = x_5 = 0.9061799$
	$c_2 = c_4 = 0.478629$	$-x_2 = x_4 = 0.538469$
	$c_3 = 0.56\underline{8}$	$x_3 = 0.0$
6	$c_1 = c_6 = 0.171325$	$-x_1 = x_6 = 0.9324695$
	$c_2 = c_5 = 0.360762$	$-x_2 = x_5 = 0.6612094$
	$c_3 = c_4 = 0.467914$	$-x_3 = x_4 = 0.2386192$

وكمثال على استخدام هذه الطريقة نأخذ في الاعتبار التكامل $I = \int_0^1 \left(1 - x^5\right) dx$ ولو اعتبرنا نقطتين فقط فإن التحويلة المطلوبة هي: $x = \dfrac{1 + x'}{2} = 0$

ذلك لأن $x' = 1$ تقابلها $x = 1$ و$x' = -1$ تقابلها $x = 0$.

بذلك فإن :

$$I = \int_0^1 \left(1 - x^5\right) dx = \int_{-1}^1 \left[1 - \left(\frac{1 + x'}{2}\right)^5\right] \left(\frac{1}{2} dx'\right)$$

$$\equiv \int_{-1}^{+1} f\left(x'\right) dx'$$

وحيث:

$$f\left(x'\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1 + x'}{2}\right)^5\right]$$

عليه وباستخدام المعادلة (36.4) نجد أن:

$$I = \frac{1}{2}\left\{\left[1 - \left(\frac{1 - 0.577335}{2}\right)^5\right] + \left[1 - \left(\frac{1 + 0.577335}{2}\right)^5\right]\right\} \cong 0.8472$$

نلاحظ أيضا أن التكامل المباشرة يعطي القيمة التامة $5/6$؛ بذلك فإن الخطأ في هذه الطريقة هو:

$$E = 5/6 - I = -0.0139$$

مما تقدم نرى نجاح هذه الطريقة وسرعة تقاربها مقارنة بطريقة شبة المنحرف المعتادة. وهي أيضا تضاهي طريقة سمبسن في الدقة.

نلاحظ أيضا أننا سقنا المثال السابق للتوضيح فقط وعلى القارئ أن يكتب برنامجا حاسوبيا مستعيناً بالجدول (3.4) للحصول على قيمة التكامل المذكور بدقة أعلى.

تمارين (4)

1. أثبت أن:

$$hD = \nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nabla^i}{i}$$

2. استنتج العلاقة:

$$y_p = y_o + p\nabla y_o + \binom{p+1}{2}\nabla^2 y_o + \ldots\ldots..$$

ثم أثبت العلاقة بين D و ∇ والمذكورة بالتمرين 1 ؛مستخدماً طريقة تفاضل المتسلسلات.

3. احسب $\sin x$ باستخدام أربعة أرقام عشرية ثم احسب مشتقة $\sin x$ عند $x = \pi/4$. وذلك للقيم الموالية:

أ- $x = 42,44,46,48$ ب- $x = 30,40,50,60$

قارن بين النتيجتين وبين المشتقة المباشرة.

4. أثبت صحة ما جاء من صيغ للخطأ في البند (3.4).

5. خذ في الاعتبار حدودية لاجرانج الاستكمالية ذات الأربع نقاط x_o, x_1, x_2, x_3 لإثبات أن:

$$L'(o) = \left(-11y_o + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3\right) / 6h$$

6. تحقق من صحة القوانين المختلفة للتكامل التي جاءت بهذا الفصل ولم تثبت.
7. أثبت قاعدة سمبسن في الحالة العامة، أي عندما يكون لدينا $2n+1$ من النقاط.
8. باستخدام قانون جريجوري، أثبت أن:

$$\int_0^{nh} y\,dx = h\left[\frac{1}{2}y_o + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right]$$
$$-\frac{h^2}{12}\left(y'_n - y'_o\right) + \frac{h^4}{720}\left(y'''_n - y'''_o\right) + \ldots\ldots\ldots$$

9. من نتيجة التمرين 8، هل يمكنك إيجاد مجموع مكعبات الأعداد الصحيحة من 1 إلى n (أي $\sum_{n=1}^{n} i^3$) [استخدام الدالة $y = x^3$]
10. عالج التكامل $\int_{-1}^{+1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ بشتى الطرق العددية التي تناولناها. ما هي الصعوبات التي تواجهك وكيف يمكنك التغلب عليها.
11. احسب $H(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ عند $x = 0.5$ وباستعمال أربعة أرقام عشرية.
12. استعمل تربيعات جاوس لحساب التكامل $\int_0^1 3x^2 dx$ لنقطتين وثلاثة نقاط. قارن بالتكامل المباشر.

الفصل الخامس

حلول المعادلات

يحتوي هذا الفصل على:

1.5 الحلول العددية للمعادلات في متغير واحد

في هذا البند نهتم بدراسة بعض الطرق التكرارية لحل المعادلات من النوع:

$$f(x)=0 \qquad \text{...... (1.5)}$$

وحيث نلاحظ أن الدقة الناتجة عند استعمال مثل هذه الطرق تقدر بالخطأ الناتج عن التقريب في آخر تكرار.

في المعتاد تستعمل عدة طرق ويتم اختبار تقاربها. فيما يلي نستعرض بعض الطرق وحيث نركز على أكثرها شيوعياً وهي طريقة نيوتن ورافسون.

1.1.5 طريقة التنصيف

حتى نحصل على أحد جذور المعادلة (1.5)، نبحث عن قيمتين $x=x_1$ و $x=x_2$ بحيث يكون $f(x_1)$ و $f(x_2)$ بإشارتين مختلفتين؛ ثم نحسب $x_3=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ و $f(x_3)$. فإذا كانت $f(x_1)$ و $f(x_3)$ لهما نفس الإشارة (لنقل) فإنه نعيد الكرة باستخدام x_2 و x_3، أي أن نحسب $x_4=\frac{1}{2}(x_2+x_3)$ و $f(x_4)$ ؛ ونعيد عملية اختبار إشارة $f(x)$ وهكذا ....، ولو افترضنا أن $f(x)$ مستمرة فإننا نصل، عن طريق التقارب، إلى جذر المعادلة $f(x)=0$. [أنظر الشكل (1.5)].

ونلاحظ أن هذه الطريقة بطيئة ولكنها بسيطة كما أن تسميتها واضحة من طريقة عملها.

$f(x_2)>0$ $\quad$ $f(x_4)>0$ $\quad$ $f(x_3)<0$ $\quad$ $f(x_1)<0$

$x_2 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_3 \quad x_1$

الشكل (1.5) توضيح بياني لطريقة التنصيف

مثال (1.5) (مثال توضيحي)

باستخدام طريقة التنصيف أوجد جذور المعادلة $x^2-5=0$ ، مستخدما رقما عشريا واحدا في حساباتك.

الحل:

نرى هنا أن $f(x)=x^2-5$ ، نختار $x_1=2$ و $x_2=3$ لنرى أن $f(2)=4-5<0$ و $f(3)=9-5>0$ ، بذلك نحسب $x_3=\dfrac{2+3}{2}=2.5$ و $f(2.5)=(2.5)^2-5>0$.

وحيث $f(2.5)$ لها نفس إشارة $f(3)$ ، عليه فإن x_4 هي $x_4=\dfrac{2+2.5}{2}=2.25$ ؛ كما أن $f(2.25)=5.0625-5>0$ وهكذا فإن $x_5=\dfrac{2+2.25}{2}=2.125$ و $f(x_5)<0$ نحسب $x_6=(2.125+2.25)/2$ لنحصل على $x_6=2.1875$ كما أن $f(x_6)<0$ ، عليه فإن: $x_7=(2.21875+2.25)/2=2.21875$ و $f(x_7)<0$ نستمر فنحسب $x_8=(2.21875+2.25)/2=2.234375$ و $f(x_8)<0$ بذلك فإن $x_9=(2.234375+2.25)/2$ وتساوي $x_9=2.2421875$ و $f(x_9)<0$ نحسب $x_{10}=(2.24218575+2.25)/2$ لنحصل على: $x_{10}=2.23828125$ و $f(x_{10})>0$ ونستطيع الاستمرار في هذه العملية حتى نتوصل إلى الدقة المطلوبة.

وفي مثالنا نرى أنه لو كانت الدقة المطلوبة هي حتى رقمين عشريين فإن الإجابة هي $x=2.23$ أما إذا كانت الدقة المطلوبة هي حتى رقم عشري واحد فإن الإجابة هي $x=2.2$.

ونلاحظ أن الحسابات اليدوية متعبة بل ومزعجة عليه نلجأ للحاسوب وحيث نقوم بإحدى طريقتين لإيقاف الحسابات والوصول إلى الدقة المطلوبة.

الطريقة الأولى

أن نحسب، من خلال حلقه أعمل (Do Loop)، وأن نجعل العملية من مائة تكرار أو أكثر إن لزم الأمر، وبالتأكيد سنصل إلى الدقة المطلوبة في إيجاد جذر المعادلة. غير أن هذه الطريقة تأخذ وقتا أو زمنا لا بأس به من زمن الحاسوب، وعليه فهي غير مرغوبة.

الطريقة الثانية

نضع إطاقة أو تسامح (ε) على القيم المتتالية للجذر بحيث تتوقف الحسابات عندما يصل $|x_{n+1} - x_n|$ قيمة معينة (مثلا $\varepsilon = 10^{-4}$) والتي نحددها نحن حسب الدقة التي نرغب في الوصول إليها. أي أننا نجعل:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \qquad \text{...... (2.5)}$$

وهذه الطريقة هي الطريقة المثلى للوصول إلى الدقة المطلوبة وبسرعة.

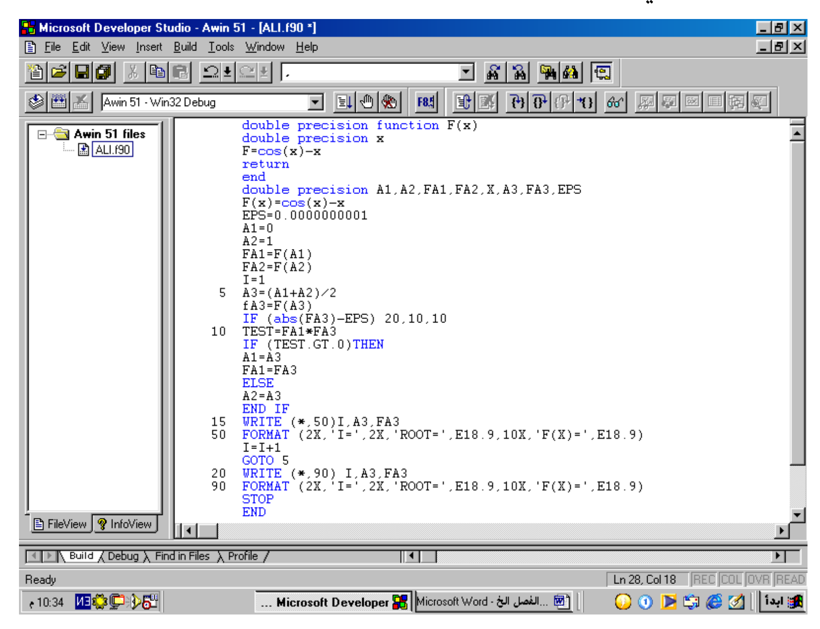
مثال (2.5)

أكتب برنامجا حاسوبيا يحسب جذر المعادلة $\cos x - x = 0$ باستخدام طريقة التنصيف.

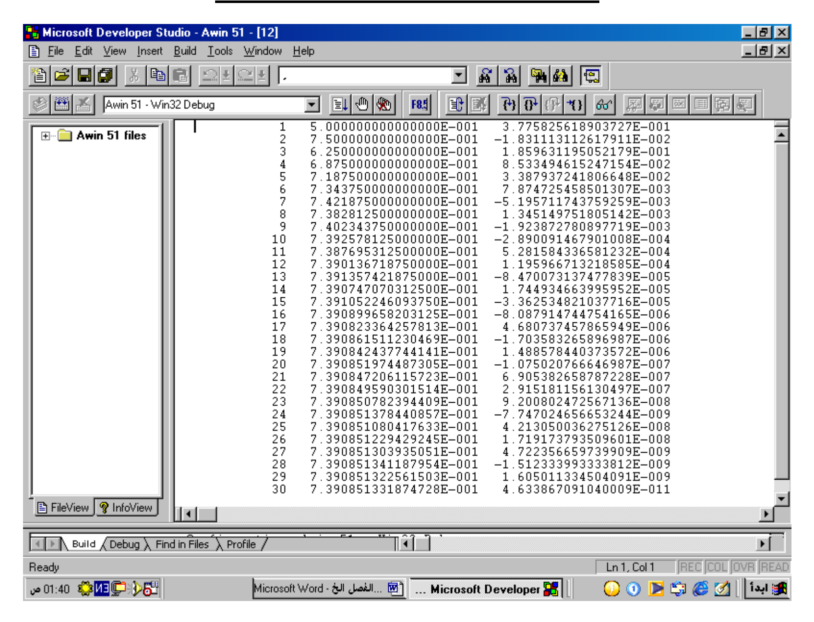
الحل:

نكتب البرنامج الموضح بالشكل (2.5) وهو بلغة فورتران لنحصل على النتائج الموضحة بالشكل (3.5) وحيث نرى أن: $x = 0.739085133\,rad$. وأن الخطأ في $f(x)$ بعد 30 تكرارا يساوي 0.46×10^{-10}.

لاحظ أن ε المختارة هي: $\varepsilon = 10^{-10}$. وهكذا توقف الحاسوب بعد 30 تكرار.



الشكل (2.5) – المثال (2.5) – طريقة التنصيف بلغة فورتران.



الشكل (3.5) – نتائج البرنامج بالشكل (2.5) للمثال (2.5).

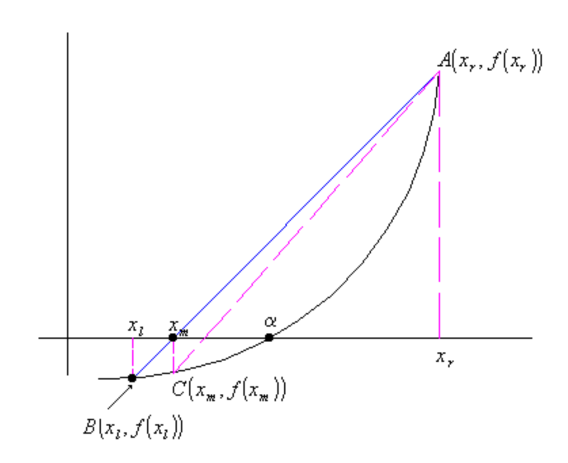
2.1.5 طريقة الموقع الخاطئ

هذه الطريقة مثلها مثل طريقة التنصيف دائما تتقارب ولكنها بطيئة التقارب مقارنة بطريقة نيوتن – رافسون التي سوف نتعرض لها بالبند الموالي؛ كما أنها تحتاج إلى قيمتين ابتدائيتين للبدء.

لتكن الدالة هي $f(x)$ كما هو موضح بالشكل (4.5) ولنختار نقطتين x_r على يمين الجذر (أي أن $f(x_r)>0$) و x_l على يسار الجذر (أي أن $f(x_l)<0$).

نرسم الوتر الواصل بين النقطتين $A(x_r, f(x_r))$ و $B(x_l, f(x_l))$ وهذا سوف يقطع المحور ox في x_m.

نقوم باختبار إشارة $f(x_m)$ ؛ فإذا كانت $f(x_m) > 0$ فإننا نستبدلها بـ x_r ؛وإذا كانت $f(x_m) < 0$ نستبدلها بـ x_l وفي الحالتين نعيد فنرسم قاطعاً جديداً يصل بين النقطتين المختارتين بعد اختبار إشارة $f(x_m)$.



الشكل (4.5) – طريقة الموضع الخاطئ.

فمثلا في الشكل (4.5) يكون القاطع الجديد هو المستقيم AC . ونلاحظ أن اختيارنا للنقطتين الابتدائيتين A و B يكون بحيث تقع A و B في جهتين مختلفتين من المحور ox .

ونلخص القاعدة المتبعة في طريقة الموضع الخاطئ كما يلي:

1. إذا كان $f(x_l) \cdot f(x_m) < 0$ فإننا نبدل x_r بـ x_m .

2. إذا كان $f(x_l)\cdot f(x_m)>0$ فإننا نبدل x_l بـ x_m.

كما أن:

$$x_m = x_l - \frac{(x_r - x_l)}{f(x_r) - f(x_l)} f(x_l) = \frac{(x_l)f(x_r) - (x_r)f(x_l)}{f(x_r) - f(x_l)} \qquad \text{...... (3.5)}$$

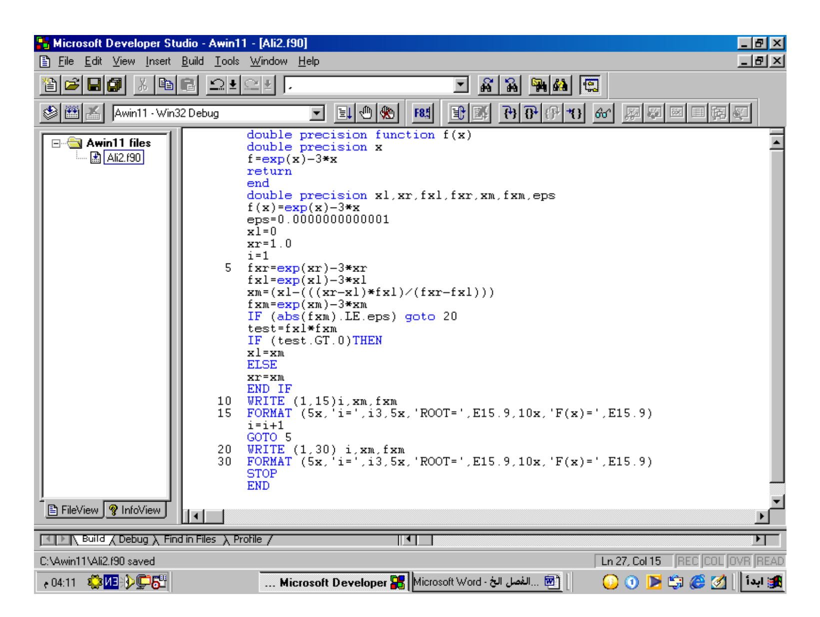
هذا ونستمر في القيام بعملية رسم القاطع الجديد حتى نصل إلى الجذر المطلوب [وهو α في الشكل (4.5)].

مثال (3.5)

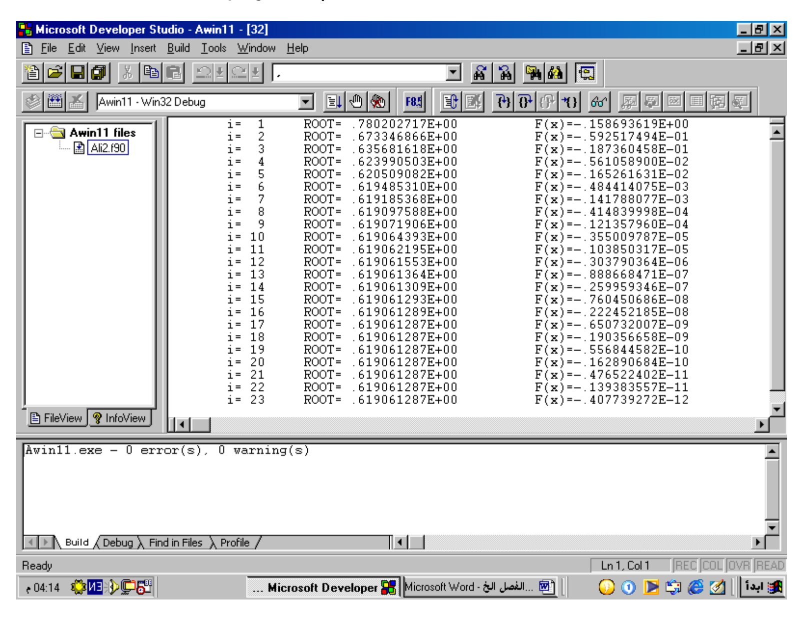
أكتب برنامجا حاسوبيا بحسب جذر المعادلة $e^x - 3x = 0$ وذلك باستخدام طريقة الموضع الخاطئ.

الحل:

بعد وضع تصور للخوارزمية المناسبة نكتب البرنامج الموضح بالشكل (5.5) والمكتوب بلغة فورتران ومنه نحصل على النتائج الموضحة بالشكل (6.5) وحيث نرى أن الجذر هو $x = 0.619061284$.

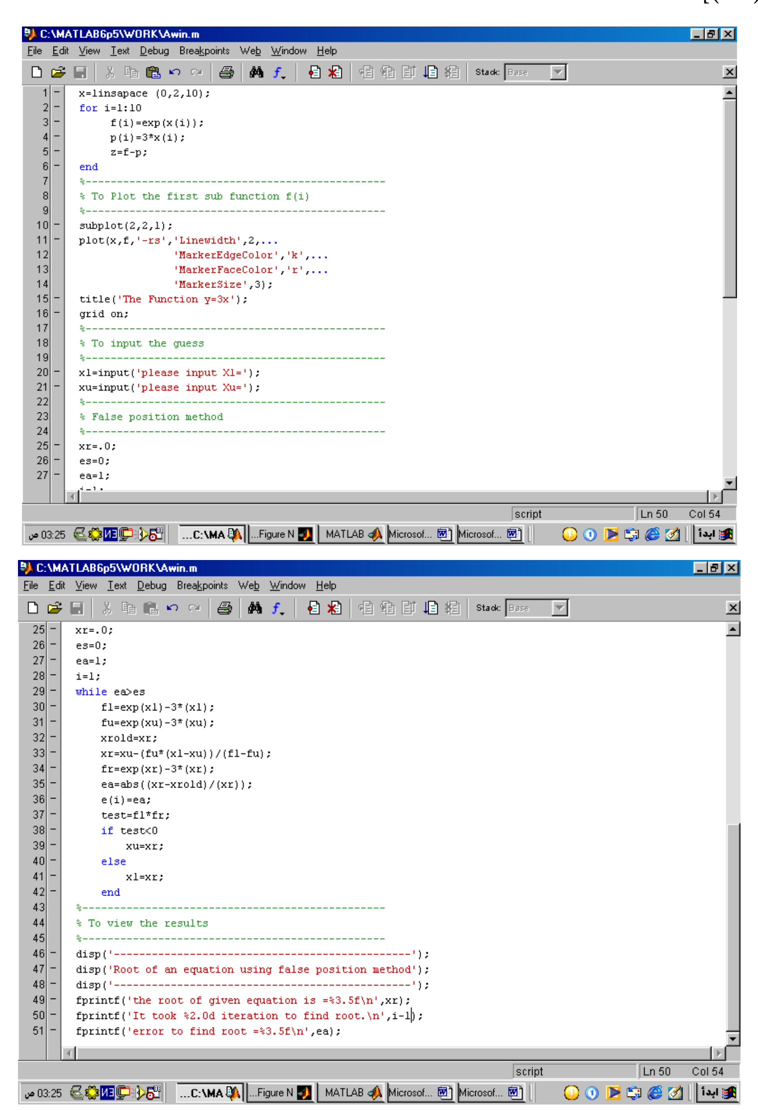


الشكل (5.5) – المثال (3.5) بلغة فورتران

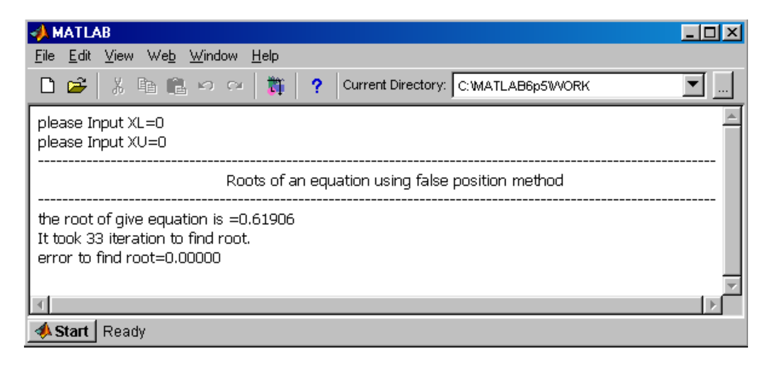


الشكل (6.5) – نتائج المثال (3.5) بفورتران.

في الشكل (7.5) نعطي برنامجا بالماتلاب لنفس المثال (3.5) وكذلك النتائج المحسوبة بهذا البرنامج [الشكل (8.5)].



الشكل (7.5) – المثال (3.5) بالماتلاب.



الشكل (8.5) – المثال (3.5) – النتائج باستعمال الماتلاب.

3.1.5 طريقة نيوتن – رافسون

بمقارنة هذه الطريقة بغيرها من الطرق الأولى نجد أنها تضاعف الدقة في عدد الأطراف المعنية في كل عملية تكرار؛ ويمكن اشتقاق الطريقة كما يلي:

لو كانت $f(x)$ قابلة للتفاضل في فترة تشتمل على الجذر $x=\alpha$ وإذا كانت $x=x_1$ هي قيمة تقريبية لهذا الجذر فإنه باستخدام نظرية القيمة المتوسطة نجد أن:

$$f'(\zeta)=\frac{f(x_1)-f(\alpha)}{x_1-\alpha} \qquad \text{...... (4.5)}$$

وحيث $\zeta\in[\alpha,x_1]$.

ولكن نحن نعلم بأن $f(\alpha)=0$ عليه فإن:

$$\alpha=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(\zeta)} \qquad \text{...... (5.5)}$$

وحيث أننا لا نعرف قيمة ζ بالضبط، نضع كتقريب أولى $f'(\zeta) \cong f'(x_1)$ لنحصل على قيمة تقريبية أخرى لـ α من العلاقة نسميها x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad \text{...... (6.5)}$$

والعلاقة (6.5) بدورها تقترح التكرار العام التالي:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) \qquad \text{...... (7.5)}$$

والتكرار (7.5) هو ما نسميه بطريقة نيوتن-رافسون.

يمكن أيضا اشتقاق العلاقة (7.5) باستخدام مفكوك تايلور.

الآن من المعادلة (7.5) نستطيع أن نكتب:

$$(x_{n+1} - \alpha) = (x_n - \alpha) - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{...... (8.5)}$$

ولو عينا الخطأ في كل تكرار بالمعادلة:

$$\varepsilon_n = x_n - \alpha \qquad \text{...... (9.5)}$$

فإن:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{...... (10.5)}$$

ولو رجعنا مرة أخرى إلى متسلسلة تايلور فإن:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 \frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{...... (11.5)}$$

وهذه العلاقة الأخيرة توضح بأن:

$$\varepsilon_{n+1} \alpha \varepsilon_n^2 \qquad \text{...... (12.5)}$$

وهذا يعني تضييق الخناق على الخطأ باستخدام طريقة نيوتن ورافسون. ولهذا السبب تسمى هذه الطريقة أيضا بالطريقة ذات الرتبة الثانية. ذلك لأن معدل تقاربها أعلى من ذلك بالنسبة للطرق الأخرى والمذكورة آنفا. ولعل المأخذ الذي نأخذه على هذه الطريقة كونها بحاجة لحساب $f'(x)$ عند نقاط عديدة.

ولمعرفة تقارب هذه الطريقة نود الإشارة إلى أن المقدار $|x_{n+1} - x_n|$ يتناقص وبسرعة كلما زادت قيمة n. عليه لو وضعنا:

$$\left| f(x_n) \middle/ f'(x_n) \right| < t \qquad \text{...... (13.5)}$$

وعينا قيمة t بعدد صغير معين (مثلا $t = 10^{-5}$) فإن الحسابات تتوقف بمجرد أن تتحقق المتباينة (13.5).

وتسمى t بالتسامح أو الإطاقة؛ أي أنها القيمة التي تحقق المتباينة (13.5) بحيث نستطيع بعدها إيقاف الحسابات؛ أما قبلها فلا يجوز ذلك وإلا فلن تكون حساباتنا دقيقة.

وتطبيقات طريقة نيوتن ورافسون كثيرة ومتنوعة، بل وتفوق نظيراتها مثل طرق التنصيف والموضع الخاطئ، حيث أنها تصلح في مواضع وحالات لا تصلح فيها الطريقتان المذكورتان.

مثال (4.5)

لنفس المعادلة $e^x - 3x = 0$؛ أكتب برنامجا حاسوبيا لحساب جذرها وذلك باستخدام طريقة نيوتن ورافسون.

الحل:

في الشكل (9.5) نعطي برنامجا مكتوبا بلغة C كما نوضح نتائج هذا البرنامج بالشكل (10.5) وحيث نلاحظ أن الإطاقة أو التسامح الذي تم اختياره هو $\varepsilon = 10^{-5}$.

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>
void main( )
{
float diff,x0,x,xn,xl,y,yl,e;
int c=o;
clrscr( );
        e=10E-5;
        x=0;
printf("\tn          x\n\n\n');
do{
y=exp(x)-3*x;
y1=exp(x)-3;
xn=x-y\yl;
prnitf("\t%d      %f\n\n\n",c,xn);
x=xn;
diff=fabs(y/yl);
c++;
}while(diff>e);
getch( );
}
```

الشكل (9.5) – المثال (4.5) بلغة C.

n	x
0	0.500000
1	0.610060
2	0.618997
3	0.619061

الشكل (10.5) –نتائج المثال (4.5) بلغة C.

في الشكل (11.5) نعطي برنامجا بلغة باسكال ونبين النتائج بالشكل (12.5).

```
Program PRO3 (input,output)
Var x:real;
Xn,y:real;
I:integer;
Label Q;
Begin
Writeln ('please enter x0');
Read(x);
Q;
if (exp(x)-3*x<>0)then
begin
Xn=x-((exp(x)-3*x)/(Exp(x)-3))
Writeln ('x',i,'=',xn);
X:=Xn;
Goto Q;
end;
end.
```

الشكل (11.5) – المثال (4.5) بلغة باسكال.

```
please enter x0
x0=6.1572189951E-01
x0=6.1905229448E-01
x0=6.1906128667E-01
x0=6.1906128674E-01
```

الشكل (12.5) – نتائج المثال (4.5) بلغة باسكال.

ونلاحظ أنه في نتائج البرنامج يكون الجذر هو :

$$x = 0.619061287$$

في ختام استعراضنا للطرق السابقة من تنصيف وموضع خاطئ وطريقة نيوتن ورافسون نجد أن السؤال التالي يطرح نفسه بإلحاح وهو:

ماذا عن تعدد الجذور؟ إنها مشكلة جدية!

فمثلا لو اعتبرنا المنحنى $f(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = 0$ والمبين بالشكل (13.5).

الشكل (13.5) – تعددية الجذور

نلاحظ أن $f(x) = (x-1)^2(x-5) = 0$ أي أن $x = 1$ مرتين و $x = 5$ مرة واحدة. وبذلك فالجذر $x = 1$ متكرر (بتعددية =2).

كما نلاحظ أنه يمكن الحصول على الجذر $x = 5$ بأي طريقة من الطرق التي أوردناها.بينما $x = 1$ يمكن الحصول عليه بطريقة نيوتن ورافسون ولكن لا يمكن الحصول عليه بطريقة التنصيف أو بطريقة الموضع الخاطئ. عليه نحصل على $x = 1$ بطريقة نيوتن ورافسون ثم نستعمل طريقة القسمة الاصطناعية لنتخلص من الحد $(x-1)$ فنحصل على حدودية من درجة أقل بواحد، وهذه نحصل على جذورها بإحدى الطرق السابقة. فمثلا للحدودية المذكورة أعلاه نجد أن خارج القسمة هو:

$$x^2 - 6x + 5$$

وذلك يتضح من القسمة الموضحة أسفله:

$$\begin{array}{c|cccc} \underline{1} & x^3 & x^2 & x & x^0 \\ & 1 & -7 & 11 & -5 \\ & & 1 & -6 & 5 \\ & & -6 & 5 & 0 \end{array}$$

2.5 حلول المعادلات الآنية

في هذا البند نناقش حلول المعادلات الآنية وحيث نتطرق في البداية إلى حلول المعادلات الخطية ثم نتحول إلى معالجة المعادلات الآنية غير الخطية.

1.2.5 حلول المعادلات الآنية الخطية

لو كان لدينا n من المعادلات في n من المجاهيل ونريد إيجاد قيم هذه المجاهيل فإننا نتعامل عندئذ بما يسمى بالمعادلات الآنية، وتكون خطية لو كانت على الصورة:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= y_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned} \qquad ......(14.5)$$

أو في صورة أخرى على الشكل:

$$AX = Y \qquad ......(15.5)$$

وحيث $A = \left(a_{ij}\right)$ و $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ و $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

وما نبتغيه هو الحصول على X. لاحظ هنا أننا نتعامل مع مصفوفة من المعاملات بعدها هو n^2.وتنقسم مثل هذه المنظومات إلى قسمين هما:

[أ] منظومة متجانسة ويكون فيها $Y = 0$؛ و

[ب] منظومة غير متجانسة ويكون فيها $Y \neq 0$.

ومن مقرر أولي في الجبر الخطي نحن نعلم بأن المنظومة المتجانسة يكون لها حل غير الحل الصفري إذا ما كان $\det(A) = 0$. بينما يكون هناك حل وحيد للمنظومة غير المتجانسة إذا كان $\det(A) \neq 0$.

هذا وتوجد عدة طرق لحل المعادلات الآنية الخطية، منها المباشرة ومنها غير المباشرة. من الطرق المباشرة طريقة كريمر (أو المحددات) وطريقة الحذف لجاوس

وطريقة استعمال معكوس المصفوفة، أما الطرق غير المباشرة فهي الطرق التكرارية ومنها طريقة جاوس وسايدل.

طريقة كريمر

تعتمد هذه أساسا على استعمال المحددات وهي طريقة بسيطة وبالتأكيد لقد تعرض لها الطالب أو القارئ من قبل وفي مراحل مبكرة من دراسته. لو أخذنا على سبيل المثال منظومة المعادلات التالية:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = f_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = f_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = f_3$$

فإنه بالتخلص من y و z باستخدام المعادلتين الأخيرتين وباستعمال الأولى نحصل على:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & b_1 & c_1 \\ f_2 & b_2 & c_2 \\ f_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

وحيث:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

كما أن y و z يعطيان بصورة مماثلة على النحو:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & f_1 & c_1 \\ a_2 & f_2 & c_2 \\ a_3 & f_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

و

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & f_2 \\ a_3 & b_3 & f_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

مثال (5.5)

قم بإيجاد حل المعادلتين:

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x + y &= 7 \end{aligned}$$

الحل:

باستخدام طريقة كريمر نرى أن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (1)(2) = -1$$

كما أن:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(5)(1) - (7)(1)}{(-1)} = 2$$

وكذلك نجد أن:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(1)(7)-(2)(5)}{(-1)} = 3$$

أي أن:

$$(x, y) = (2,3)$$

لقد قمنا في المثال السابق بالحسابات العددية يدويا و ذلك لأن عدد المعادلات صغير. غير أنه عندما يكون عدد المعادلات كبيراً فإننا بحاجة إلى برمجة و استخدام الحاسوب كما سنوضحه فيما بعد.

طريقة الحذف لجاوس

في هذه الحالة نرتب المعادلات بطريقة معينة ثم نستخدم الأولى لحذف x_1 من بقية المعادلات التي تلي الأولى؛ بعد ذلك نستخدم المعادلة الثانية لحذف x_2 من المعادلات التي تليها وهكذا حتى نصل في النهاية إلى المعادلة الأخيرة حاوية x_n فقط. بعد الحصول على x_n نعود أدراجنا معادلة فنوجد x_{n-1} ثم x_{n-2} حتى x_2 و x_1.

لتوضيح هذه العملية أو الطريقة دعنا نسوق المثال التالي:

مثال (6.5)

أوجد حل المعادلات الآنية التالية:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 12 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

الحل:

لحل هذه المنظومة من المعادلات يدويا، نقوم بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى

نعيد ترتيب المعادلات بحيث يكون معامل x_1 يساوي الواحد الصحيح (وإن لم تتواجد معادلة تحقق هذا الشرط نقوم بقسمة أطراف أي معادلة على معامل x_1) وبذلك نحصل على:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 12 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

الخطوة الثانية

نتخلص من x_1 في المعادلتين الأخيرتين باستعمال المعادلة الأولى وذلك بالضرب في 2- والجمع بالنسبة للثانية وبالضرب في 3- والجمع بالنسبة للثالثة، وهكذا نحصل على:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 12 \\ 0 - 3x_2 - 5x_3 &= -21 \\ 0 - 4x_2 - 7x_3 &= -29 \end{aligned}$$

نقوم بعدها بقسمة المعادلة الثانية في المنظومة على 3- لنحصل على:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 12 \\ x_2 + \frac{5}{3}x_3 &= 7 \\ -4x_2 - 7x_3 &= -29 \end{aligned}$$

الخطوة الثالثة: نتخلص من x_2 في المعادلة الثالثة باستخدام المعادلة الثانية وذلك بضربها في 4 والجمع وبذلك نحصل على:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 12$$
$$x_2 + \frac{5}{3}x_3 = 7$$
$$0 - \frac{1}{3}x_3 = -1$$

الخطوة الرابعة (والأخيرة): من المعادلة الأخيرة نرى أن $x_3 = 3$ وبالتعويض في الثانية نرى أن:

$$x_2 = 7 - \frac{5}{3}(3) = 7 - 5 = 2$$

وأخيرا بالتعويض في الأولى عن x_2 و x_3 نجد أن: $x_1 = 12 - x_2 - 3x_3 = 12 - 2 - 9 = 1$

أي أن حلول المنظومة المعطاة هي: $x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 2 \quad , \quad x_3 = 3$

ويمكن برمجة هذه الطريقة باستخدام إحدى لغات الحاسوب؛ ويفضل ذلك إذا ما كان عدد المعادلات كبيراً.

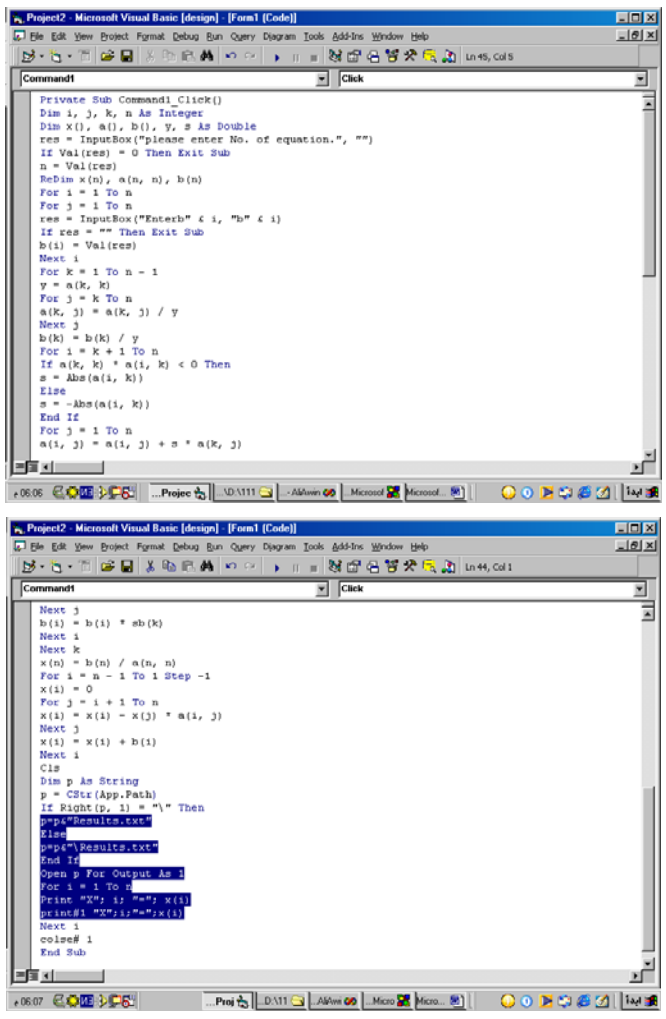
مثال (7.5)

أكتب برنامجا حاسوبيا عاما لحل n من المعادلات الآنية في n من المجاهيل: ثم أوجد حل منظومة المعادلات الموالية:

$$x - y + z = 4$$
$$2x + y - z = 2$$
$$3x + 5y + 2z = 31$$

الحل:

يمكن كتابة البرنامج بأي لغة ولقد اخترنا هنا لغة بيسك المرئية الموضحة بالشكل (14.5)؛ ولو قمنا بإجراء البرنامج لحصلنا على $x_1 = 2$ و $x_2 = 3$ و $x_3 = 5$.



الشكل (14.5) – المثال (7.5) بلغة بيسك المرئية.

نلاحظ أنه من الممكن جداً أن يلعب الخطأ الناتج عن التقريب دوراً هاماً في حل المعادلات الآنية، ويظهر ذلك خاصة في طريقة الحذف لجاوس، حيث أن كل خطوة في الحسابات تعتمد على التي قبلها، وهكذا فإنه إذا حدث خطأ فإنه ينتشر.

في المعتاد يتم الكشف عن الخطأ هنا بالرجوع إلى المعادلات والتعويض عن الحلول والمقارنة؛ فمثلا لو اعتبرنا المعادلتين:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 7 \\ 5x_1 - 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

وحدث أن أخطأنا قليلا وحصلنا على الحلول $x_1 = 0.999$ و $x_2 = 1.002$ فإنه عند التعويض نجد أن $3x_1 + 4x_2 = 7.005$ و $5x_1 - 2x_2 = 2.991$. وبمقارنة هذه الأعداد بالأعداد 7 و3 نقاد إلى الاعتقاد بأن النتائج صحيحة تقريبا. غير أن هذه المقارنة ليست دائما سليمة. فمثلاً للمعادلتين:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 1.01x_1 + x_2 &= 2.01 \end{aligned}$$

نرى أنه توجد مجموعتان من الحلول $x_1 = x_2 = 1$ و $x_1 = 0$ و $x_2 = 2.005$ وكلاهما تحققان المعادلتين (بخطأ في 2 و 2.01 مقداره 0.005) ولكن الخطأ في كل قيمة للمتغير $x_i(i=1,2)$ هو 1. وهذا أمر غير مقبول بل وشائن.

ويمكن أن يحدث الخطأ بسبب خطأ في معاملات المجاهيل، وعليه فإن منظومة المعادلات التي تتحقق بحلول خاطئة تسمى بالمكيفة مرضيا. ويرجع السبب في هذا التكييف المرضي أساساً إلى أن محدد المعاملات يقارب الصفر في قيمته. وكون المحدد

قريب من الصفر يعتبر من الأمور السيئة. تذكر أنه في حالة مساواة المحدد للصفر إما أن نحصل على عدد لانهائي من الحلول أو أن لا نحصل على أي حل.

طريقة معكوس المصفوفة

لو أن $\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{B}$ فإنه بالضرب في $\underset{\sim}{A}^{-1}$ نحصل على: $\underset{\sim}{A}^{-1}\,\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{A}^{-1}\,\underset{\sim}{B}$.

وحيث أن $\underset{\sim}{A}^{-1}\,\underset{\sim}{A} = 1$ فإننا نحصل على: $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{A}^{-1}\,\underset{\sim}{B}$، عليه لو أمكن حساب $\underset{\sim}{A}^{-1}$ فإننا نتمكن من حساب $\underset{\sim}{X}$ وهو متجه الحل.

مثال (8.5)

أعد حل المثال (6.5) باستخدام معكوس المصفوفة.

الحل:

منظومة المعادلات هي:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 12$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$
$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$$

وهذه يمكن كتابتها على الصورة: $AX = B$

وحيث:

$$\underset{\sim}{B} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ و } \underset{\sim}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ و } \underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

نوجد A^{-1} وهذه يمكن إيجادها بعدة طرق سبق للقارئ أن تعرف لها بدراسته السابقة.

هذا وسوف نقوم هنا بحساب A^{-1} بطريقة سهلة وذلك بوضعها جنبا إلى جنب ويسارا مع $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ثم نقوم بإجراء عدة عمليات صفية (r) حتى تتحول I_3 إلى اليسار من $\underset{\sim}{A}$ بدلا من اليمين؛ ونوضح الحل كما يلي:

$$\left(\underset{\sim}{A}\ I_3\right) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 3r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2/(-3)}$$

$$\left(\underset{\sim}{A}\ I_3\right) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 + 4r_2]{r_1 \to r_1 - r_2}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 4/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & -4/3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \to r_2 + 5r_5]{r_1 \to r_1 + 4r_3}$$

Z

$$= \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & -4/3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to -3r_3}$$

$$\left(\underset{\sim}{A}\ I_3\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & -1 & -5 & 4\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & -7 & 5\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 4 & -3\end{pmatrix}\equiv\left(I_3\ \underset{\sim}{A}^{-1}\right)$$

وبذلك فإن:

$$\underset{\sim}{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -5 & 4\\ -1 & -7 & 5\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$$

والحلول هي:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\underset{\sim}{A}^{-1}B=\begin{pmatrix}-1 & -5 & 4\\ -1 & -7 & 5\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\ 3\\ 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12-15+28\\ -12-21+35\\ 12+12-21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

وهي الحلول التي سبق التوصل إليها بطريقة الحذف لجاوس.

الطريقة التكرارية (طريقة جاوس وسايدل)

مرة أخرى نعتبر منظومة المعادلات الآنية الخطية $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{Y}$، ولنفترض أن المعاملات a_{ii} (وهي القطرية) كلها لا تساوي الصفر؛ عندئذ نقوم بكتابة x_i بدلالة البقية كما يلي:

$$x_i=\frac{1}{a_{ii}}\left\{y_i-a_{i1}x_1-a_{i2}x_2-.......-a_{in}x_n\right\},\ i=1,2,.....,n$$

فمثلاً نرى أن:

$$x_1=\frac{1}{a_{11}}\left\{y_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3-.......-a_{1n}x_n\right\}$$

كما أن:

$$x_2=\frac{1}{a_{22}}\left\{y_2-a_{21}x_1-a_{23}x_3-.......-a_{2n}x_n\right\}$$

.....وهكذا بالنسبة لبقية المتغيرات.

نفترض في البداية قيم ابتدائية لكل x_i ثم نقوم بالتعويض بها ونحسب x_1 (مثلاً)، بعد ذلك نعوض بهذه القيمة الجديدة لـ x_1 وبالقيم الابتدائية الأخرى نحسب x_2.ثم بقيم x_1 و x_2 الجديدة والقيم الابتدائية الأخرى نحسب x_3. أي أنه في كل مرة نأخذ بالقيمة الجديدة المحسوبة والقيم الأخرى لحساب قيمة جديدة للمتغير الموالي؛ وبذلك نتدرج من القمة حتى القاعدة لنحسب قيم جديدة لكل x_i ثم نعود فنعيد الكرة حتى نصل إلى الحلول المطلوبة.

لفهم ذلك دعنا نوضح الطريقة من خلال مثال خاص وبسيط باستخدام برنامج صغير بالفورتران.

مثال (9.5)

استخدم الطريقة التكرارية لحل المعادلات التالية:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= -3 \\
x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 4x_4 &= 15 \\
-x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 10 \\
x_2 + x_4 &= 2
\end{aligned}
$$

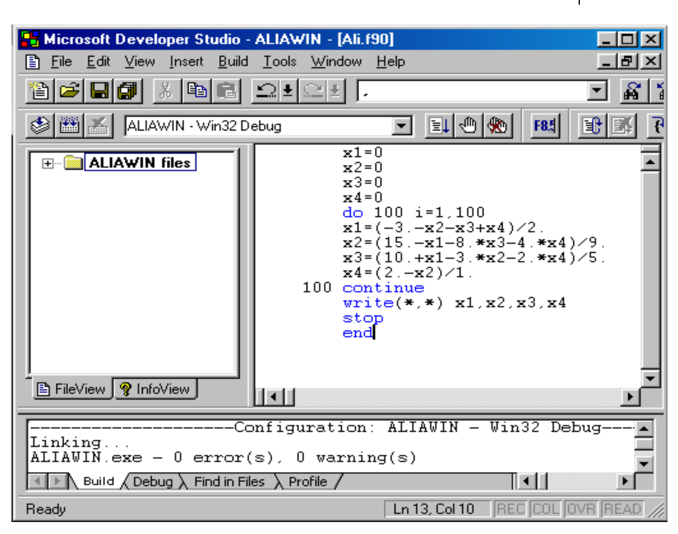
الحل:

نكتب x_i على الصورة:

$$x_1 = \left(-3 - x_2 - x_3 + x_4\right)\Big/2 \text{ ؛ و } x_2 = \left(15 - x_1 - 8x_3 - 4x_4\right)\Big/9$$

$$x_3 = \left(10 + x_1 - 3x_2 - 2x_4\right)\Big/5 \text{ و } x_4 = 2 - x_2$$

ثم نكتب البرنامج الموضح بالشكل (15.5) وحيث نرى أنه قد استخدمنا حلقة أعمل من مائة خطوة حتى نضمن الوصول إلى الحلول المطلوبة. غير أنه لابد أن ننوه بأنه كان من الأكفأ والأجدى استعمال إطاقة أو تسامح (حسب الدقة المطلوبة) على القيم المتتالية لكل متغير (مثلا أن نستخدم $\left|x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)}\right| < 10^{-5}$).



الشكل (15.5) – المثال الخاص (9.5)

لو قمنا بإجراء البرنامج بالشكل (15.5) فإننا نحصل على النتائج التالية:



ونود أن نشير هنا إلى أن هذه الطريقة طويلة وتقاربها بطئ إلا إذا كان العديد من المعادلات مساويا الصفر. لهذا السبب لا تستعمل هذه الطريقة إلا إذا فشلت الطريقة المباشرة.

والإجابة عن السؤال المتعلق بتقارب الحلول ليست بسيطة، حيث أنه من الصعب، عادة، تخمين وقف عملية التكرار؛ غير أنه يمكن الاهتداء بما يلي:

[أ] إذا كانت الحلول متقاربة فإنه ربما يأخذ ذلك عدداً لا بأس به من خطوات التكرار.

[ب] لوقف عملية التكرار إما أن نضع نهاية عظمى لعدد مرات التكرار (100 مثلاً في المثال السابق)؛ أو أن نضع قيمة تسامح أو إطاقة على القيم المتتالية لـ x_i.

[ج] إذا لم نتمكن من التوصل إلى الخطوة [ب] فإن ذلك يعني أن العملية غير متقاربة ومن المحبذ إعادة ترتيب المعادلات للحصول على التقارب.

وفي هذا الصدد نورد مبرهنة مهمة عن تقارب الطريقة التكرارية.

مبرهنة

تتقارب طريقة جاوس وسايدل التكرارية إذا ما كان بالمحدد المميز كل حد بالقطر الرئيسي أكبر من (في قيمته المطلقة) مجموع القيم المطلقة لكل الحدود الأخرى في نفس الصف أو العمود.

أي أنه من المؤكد الحصول على التقارب إذا كان:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad ; \quad i = 1,.....,n$$

و

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad ; \quad i = 1,2,.....,n$$

2.2.5 حلول المعادلات الآنية غير الخطية

لحل المعادلات الآنية غير الخطية، دعنا نبدأ بحل معادلتين آنيتين غير خطيتين في مجهولين (x, y)، ولتكن هاتين المعادلتين هما:

$$f_1(x, y) = 0 \qquad ...... (16.5)$$

و

$$f_2(x, y) = 0 \qquad ...... (17.5)$$

والمطلوب هو إيجاد النقطة (x, y) التي تحقق المعادلتين (16.5) و(17.5).

ما سنقوم به هو إيجاد علاقات تكرارية من النوع:

$$x_{i+1} = g_1(x_i, y_i) \qquad ...... (18.5)$$

و

$$y_{i+1} = g_2(x_i, y_i) \qquad ...... (19.5)$$

وحيث نبدأ بقيم ابتدائية مختارة ونستمر في استعمال (18.5) و (19.5) حتى نصل إلى الحل المطلوب.

للقيام بعمليات تكرارية لابد من طريقة ما؛ والطريقة المعروفة هي طريقة نيوتن ورافسون.

لاشتقاق هذه الطريقة نلجأ كالمعتاد إلى متسلسلة تايلور في متغيرين لنكتب f_1 و f_2 عند (x_{i+1}, y_{i+1}) بدلالة (x_i, y_i) وذلك كما يلي:

$$f_1(x_{i+1}, y_{i+1}) = f_1(x_i, y_i) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_{(x_i, y_i)} (x_{i+1} - x_i) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_{(x_i, y_i)} (y_{i+1} - y_i) + \ldots \qquad \ldots\ldots (20.5)$$

و

$$f_2(x_{i+1}, y_{i+1}) = f_2(x_i, y_i) + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_{(x_i, y_i)} (x_{i+1} - x_i) + \left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_{(x_i, y_i)} (y_{i+1} - y_i) + \ldots \qquad \ldots\ldots (21.5)$$

ولو أن (x_{i+1}, y_{i+1}) قريبة من الجذر فإننا نضع كتقريب أولى $f_1(x_{i+1}, y_{i+1}) = 0$ و $f_2(x_{i+1}, y_{i+1}) = 0$ وبذلك نحصل على:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} h + \frac{\partial f_1}{\partial y} k = -f_1(x_i, y_i) \qquad \ldots\ldots (22.5)$$

و

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} h + \frac{\partial f_2}{\partial y} k = -f_2(x_i, y_i) \qquad \ldots\ldots (23.5)$$

وحيث وضعنا:

$$h = x_{i+1} - x_i \qquad \ldots\ldots (24.5)$$

و

$$k = y_{i+1} - y_i \qquad \ldots\ldots (25.5)$$

كما أن المشتقات الجزئية لـ f_1 و f_2 كلها محسوبة عند النقطة (x_i , y_i).

والمعادلتان (22.5) و (23.5) يمكن حلهما في h و k إذا ما كان الجاكوبي J لا يساوي الصفر، أي عندما :

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{...... (26.5)}$$

وحل المعادلتين المذكورتين عندئذ يتمثل في:

$$h = \frac{\begin{vmatrix} -f_1(x_i , y_i) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ -f_2(x_i , y_i) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}}{J} \qquad \text{...... (27.5)}$$

و

$$h = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & -f_1(x_i , y_i) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & -f_2(x_i , y_i) \end{vmatrix}}{J} \qquad \text{...... (28.5)}$$

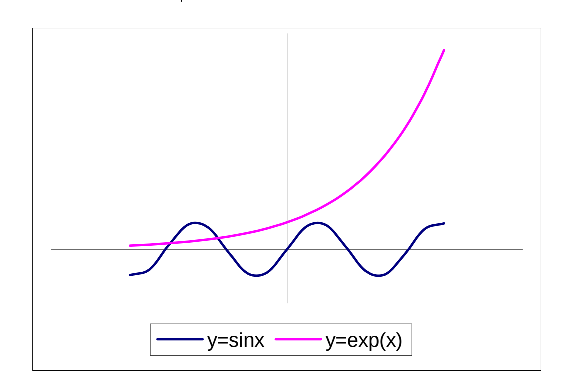
وبالحصول على h و k نعود إلى المعادلتين (24.5) و (25.5) لنعوض بهما ونحصل على (x_{i+1} , y_{i+1}) ثم نعيد الكرة بالقيم الجديدة. كما أننا نتوقف إذا ما حصلنا على الحل المطلوب حسب الدقة المعينة وذلك من خلال وضع إطاقة أو تسامح على القيم المتتالية على x و y.

مثال (10.5)

قم بحل المعادلتين الآنيتين غير الخطيتين $y = e^x$ و $y = \sin x$.

الحل:

نلاحظ من منحنى الدالتين [الشكل (16.5)] أن الحلول لانهائية في العدد غير أنه سوف نقوم هنا بإيجاد حل واحد فقط والبقية يمكن إيجادها باختيار قيم ابتدائية مختلفة.



الشكل (16.5) الدالتان $y = e^x$ **و** $y = \sin x$.

نلاحظ أن $f_1(x, y) = y - e^x$ وبذلك فإن:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -e^x \quad \text{و} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = +1$$

كما أن $f_2(x, y) = y - \sin x$ وبذلك فإن $\frac{\partial f_2}{\partial x} = -\cos x$ و $\frac{\partial f_2}{\partial y} = +1$ ويكون الجاكوبي J هو :

$$J = \begin{vmatrix} -e^x & +1 \\ -\cos x & +1 \end{vmatrix} = \cos x - e^x$$

ويجب أن نتحاشى القيم التي تجعل $J = 0$ أي تلك التي تحقق $\cos x - e^x = 0$. كما نحسب h و k من المعادلتين:

$$h = \frac{\begin{vmatrix} e^{x_i} - y_i & +1 \\ \sin x_i - y_i & +1 \end{vmatrix}}{\left(\cos x_i - e^{x_i}\right)} = \frac{\left(e^{x_i} - \sin x_i\right)}{\left(\cos x_i - e^{x_i}\right)}$$

$$k = \frac{\begin{vmatrix} -e^{x_i} & e^{x_i} - y_i \\ -\cos x_i & \sin x_i - y_i \end{vmatrix}}{\left(\cos x_i - e^{x_i}\right)} = \frac{\left[\cos x_i \left(e^{x_i} - y_i\right) - e^{x_i}\left(\sin x_i - y_i\right)\right]}{\left(\cos x_i - e^{x_i}\right)}$$

ويمكن أن نبدأ بقيمة ابتدائية $(-2.5,0)$.

لو قمنا بذلك وقمنا بكتابة برنامج حاسوبي بلغة C مثلاً [البرنامج بالشكل (17.5)] لحصلنا على النتائج الموضحة بالشكل (18.5) والتي توضح بأن الحل الأول المطلوب هو: $(-3.183, 0.041)$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية؛ والذي تم الحصول عليه بعد 6 تكرارات.

(نلاحظ أنه لو أردنا الحل الثاني فإننا نضع $x_0 = -6$ و $y_o = 0.0$] - أنظر الشكل (18.5)).

```
#include<math.h>
#include<conio.h>
#include<conio.h>
#include<stdio.h>
main( )
{
clrscr( );
float x1,y1,y2=0,x2=0,num1,den1,num2,den2,d,f1,f2;
int i=1;
cout<<"Enter the initial x0,y0?"<<'\n';
cin>>x1>>y1;
d=1000
while(d>pow(10,-4))
{
num1=sin(x1)-y1;
den1=cos(x1);
num2=exp(x1)-y1;
den1=-1;
x2=x1-(num1/den1);
y2=y1-(num2/den2);
cout<<"x"<<i<<"="<<x2<<'\t'<<"y"<<i<<"="<<y2<<'\n'
;
++I;
d=fabs(x2-x1);
x1=x2;
y1=y2;
}
```

الشكل (17.5) – المثال (10.5) بلغة C.

```
Enter the initial x0,y0?
-2.5
0
X1=-3.247022        y1=0.082085
X2=-3.223744        y2=0.038890
X3=-3.180429        y3=0.039806
X4=-3.181409        y4=0.041568
X5=-3.183172        y5=0.041527
X6=-3.183132        y6=0.041454
```

الشكل (18.5) نتائج المثال (10.5).

مثال (11.5)

قم بكتابة برنامج حاسوبي لحساب حلول المعادلتين الآنيتين غير الخطيتين $y = \cos x$ و $x = \sin y$. وذلك باستعمال طريقة نيوتن ورافسون.

الحل:

لو قمنا برسم الدالتين في المستوى $x - y$ لوجدنا أنه يوجد حل واحد عند $(0.768...,0.695...)$ تقريبا.

الآن نضع:

$$f_1(x,y) = \cos x - y = 0$$

و

$$f_2(x,y) = +x - \sin y = 0$$

ونلاحظ أن:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = -\sin x$$

كما أن:

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = -\cos y \quad \text{و} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = +1$$

والجاكوبي هو :

$$J = \begin{vmatrix} -\sin x & -1 \\ 1 & -\cos y \end{vmatrix} = \sin x \cos y + 1 \neq 0$$

كما أن:

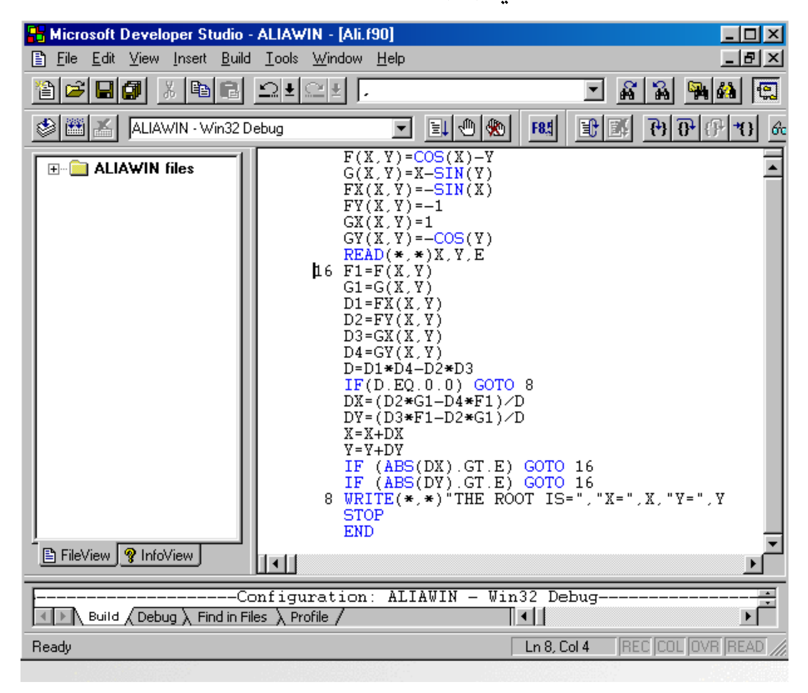
$$h = \frac{(\cos x - y)\cos y - (x - \sin y)}{1 + \sin x \cos y}$$

و

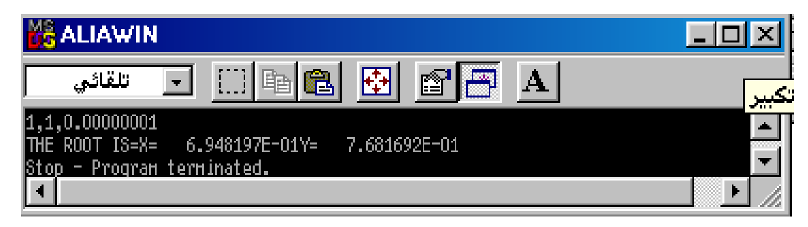
$$k = \frac{\sin x(x - \sin y) + (\cos x - y)}{1 + \sin x \cos y}$$

نقوم بكتابة البرنامج الموضح بالشكل (19.5) وهو بلغة فورتران 90 لنحصل

على النتيجة المتوقعة والموضحة بالشكل (20.5). وحيث نلاحظ أننا استخدمنا تسامحا بقيمة تساوي 10^{-8} وقيمة ابتدائية للحل هي $(1,1)$.



الشكل (19.5) – المثال (11.5) بلغة فورتران 90.



الشكل (20.5) نتائج المثال (11.5).

ويمكننا تعميم هذه الطريقة لـ n. من المعادلات في n من المجاهيل إلا أن العملية تصبح صعبة؛ ذلك لأننا سوف نحسب n^2 من المشتقات الجزئية. عليه وكبديل نستعمل طريقة نيوتن ورافسون المعدلة وذلك باعتبار المعادلة الأولى معادلة في x والثانية معادلة في y وهكذا.....؛ ثم نستخدم طريقة نيوتن ورافسون في متغير واحد والتي سبق وأن تعرضنا لها بالبند (3.1.5). فمثلاً لمعادلتين في مجهولين نستخدم:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f_1(x_i, y_i)}{\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_{(x_i, y_i)}} \qquad \text{...... (29.5)}$$

و

$$y_{i+1} = y_i - \frac{f_2(x_i, y_i)}{\left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_{(x_i, y_i)}} \qquad \text{...... (30.5)}$$

والعيب في هذه الطريقة، رغم سهولتها، يكمن في أمرين:

الأول: أنها تأخذ زمنا أطول من طريقة نيوتن ورافسون المعتادة.

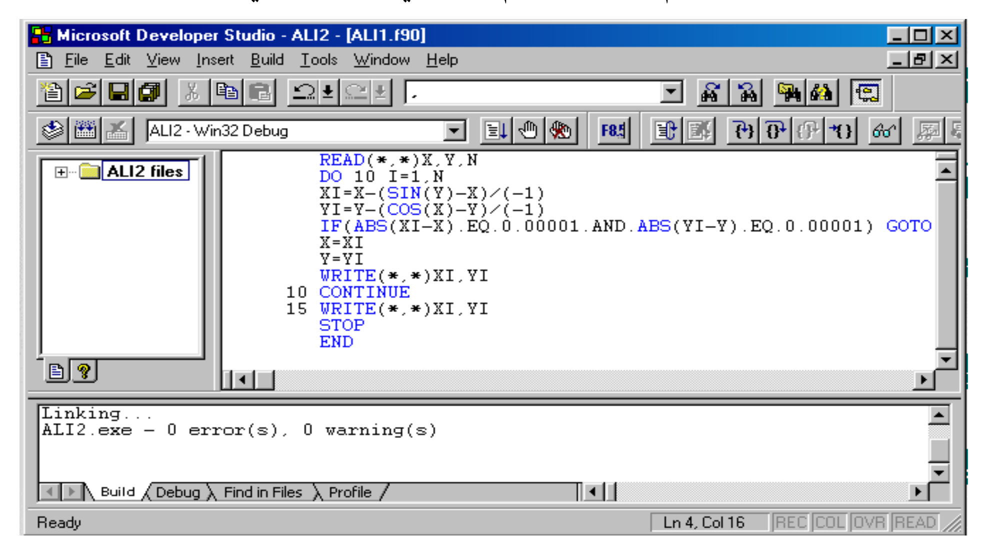
الثاني: قد يحدث أحيانا أن اختيارنا لـ f_1 و f_2 لا يؤدي إلى التقارب، فإذا حدث ذلك نبدل f_1 بـ f_2 و f_2 بـ f_1 وعندئذ سنحصل بالتأكيد على التقارب.

مثال (12.5)

أعد حل المثال (10.5) وذلك باستعمال طريقة نيوتن ورافسون المعدلة.

الحل:

نكتب البرنامج الموضح بالشكل (21.5) ولو قمنا بإجرائه لحصلنا على النتائج الموضحة بالشكل (22.5). وحيث نستخدم إطاقة على القيم المتتالية في x و y تساوي 10^{-5}.



الشكل (21.5) – المثال (12.5) بلغة فوتران.

```
1 2 10
   9.092974E-01     5.403023E-01
   5.143952E-01     6.143003E-01
   5.763869E-01     8.705904E-01
   7.647095E-01     8.384373E-01
   7.435991E-01     7.215835E-01
   6.605743E-01     7.360370E-01
   6.713560E-01     7.896399E-01
   7.100998E-01     7.829789E-01
   7.053940E-01     7.582968E-01
   6.876859E-01     7.613562E-01
   6.876859E-01     7.613562E-01
Stop - Program terminated.

Press any key to continue_
```

الشكل (22.5) – نتائج المثال (12.5).

تمارين (5)

1. باستعمال الطرق المختلفة من تنصيف وموضع خاطئ ونيوتن ورافسون، احسب جذور المعادلات التالية:

[أ] $x^3 - 28 = 0$ [ب] $\cos x = \frac{1}{2}$ [ج] $e^x = 5x$

[د] $\ln x - x + 2 = 0$ [ه] $x^2 - 2x - 3.5 = 0$ [و] $\tan x = 1.1$

2. اكتب برامج حاسوبية للمسألة (1) الفقرات [أ] ، [ج] ، [و].

3. استخدم طريقة التنصيف لحساب قيمة الجذر السالب للمعادلة $x^3 - 2x - 3 = 0$.

4. المعادلة $x^2 - x = 0$ لها جذران هما $x = 0$ و $x = 1$ ، فإذا استخدمنا التكرار $x_{i+1} = x_i^2$ ، فأي الجذرين يمكن الحصول عليه بقيمة ابتدائية $x_o = \frac{1}{3}$ ؟ ماذا عن الجذر الثاني ؟.

5. العملية التكرارية باستعمال طريقة نيوتن ورافسون للمعادلة $x^2 - x = 0$ هي :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\left(x_i^2 - x_i\right)}{2x_i - 1} = \frac{x_i^2}{2x_i - 1}$$

اكتب برنامجا حاسوبيا لإيجاد الجذرين باستخدام قيم ابتدائية $\frac{1}{2}, 5$ و 10 بالترتيب المذكور. اشرح نتائجك.

6. استخدم طريقة الحذف لجاوس وطريقة كريمر وطريقة معكوس المصفوفة لحل منظومة المعادلات التالية:

[أ]
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

[ب]
$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_2 \qquad\quad + x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

[ج]
$$\begin{aligned} x + 3y - z &= 4 \\ 5x - 2y - z &= -2 \\ 2x + 2y + z &= 9 \end{aligned}$$

7. استخدم طريقة جاوس وسايدل لحساب حلول المعادلات بالفقرة [ب] بالسؤال السابق.

8. أوجد قيم المجاهيل إلى ثلاثة أرقام عشرية في المعالتين:

$$\begin{aligned} 8.7x - 2.3y &= 4.8 \\ 3.2x - 7.4y &= 5.3 \end{aligned}$$

9. قم باشتقاق طريقة نيوتن ورافسون في حالة ثلاثة معادلات آنية غير خطية:

$f_1(x, y, z) = 0$ و $f_2(x, y, z) = 0$ و $f_3(x, y, z) = 0$.

ماذا عن طريقة نيوتن ورافسون المعدلة في هذه الحالة.

10. احسب جذور المعادلات الآنية غير الخطية الموالية:

[أ] $x = \sin y \quad , \quad y = e^x$

[ب] $y = \ln x \quad , \quad y = \cos x$

[ج] $y = x^2 \quad , \quad y = e^x$

الفصل السادس

الملائمة باستخدام طريقة المربعات الصغرى

يحتوي هذا الفصل على:

1.6 تقد يم

في المعتاد يكون بمعيتنا جدول به بيانات كما بالجدول (1.6) حيث $(x_i, f(x_i))$ تمثل النقطة i و f الدالة تحت الدراسة.

فإذا افترضنا أن القيم الموجودة بالجدول دقيقة فإنه يمكننا الحصول على قيمة f عند أي نقطة $\overline{X}$ وذلك باستخدام الطرق العددية المعروفة من استكمال وغيره .

غير أن القيم بالجدول عادة ما تكون تقريبية مثلا القياسات بمعمل فيزياء أو قياسات هندسية وعليه فإن هذه القيم ترتبط بأخطاء مصدرها الأجهزة المستخدمة للقياس أو الإنسان أو غير ذلك .

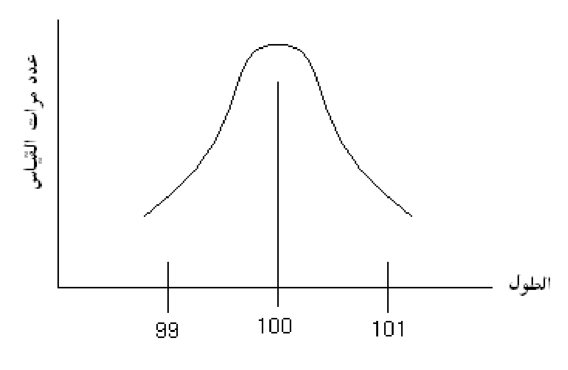
الجدول (1.6)- بيانات

$f(x_i)$	x_i
$f(x_1)$	x_1
$f(x_2)$	x_2
$\vdots$	$\vdots$
$f(x_n)$	x_n

لنفترض أن الأخطاء في $f(x_i)$ هي ε_i وحيث ε_i يمكن أن تكون موجبة أو سالبة . فمثلا لو طلب منا قياس قطعة معدنية طولها مائة سنتمتر بمسطرة طولها 30 سم فإننا سوف نقوم بقياسها العديد من المرات وفي كل مرة نحصل على جواب قريب من المائة ولكنها كلها تختلف بمليمترات بسيطة.

ولو قمنا بالعديد من القياسات وقمنا برسمها بيانياً لحصلنا على الشكل (1.6)

الذي يمثل، فيه المحور الأفقي الطول والمحور الرأسي عدد مرات القياس ؛و الشكل الذي حصلنا عليه يسمى بشكل الجرس.



الشكل (1.6)- شكل الجرس

وتوزيعة الأخطاء في مثل هذه الحالة تسمى بالتوزيعة الجاوسية أو التوزيعة الطبيعية.

من المنحنى نلاحظ أن معظم القياسات كانت بالقرب من 100 سم وقليل منها هنا وهناك. هذا بدوره يقودنا إلى أن الأخطاء العشوائية يمكن التخلص منها (بطريقة متوسطية) من جدول بيانات إذا تواجدت لدينا قياسات كافية.

وعليه فإن طريقة ملائمة المنحنيات (curve fitting) هي في الحقيقة عملية أخذ متوسط للعديد من القياسات لكميات مختلفة، وفي ذلك نفترض أن هذه الكميات تتبع معادلة ما بسيطة.

وحيث إنه يمكن ملائمة عدد من المنحنيات السلسة (smooth curves) لنفس

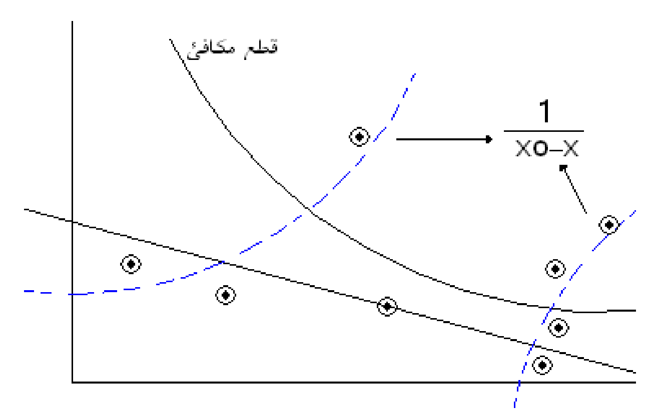
الفئة من البيانات، عليه نحن بحاجة إلى تدقيق وحكم حول اختيار ((الملائم الجيد)) وهذا يعني: نحن بحاجة إلى إجابة على السؤال ((إلى أي مدى يكون المنحنى سلساً؟)).

فمثلا لو نظرنا للشكل (2.6) للاحظنا أنه توجد ثلاثة منحنيات يمكن أن تتنافس على ملائمة المعلومات التجريبية (experimental data) أو المعملية الموضحة . لكننا نلاحظ أن المنحنى $\frac{1}{x_0 - x}$ أقلها سلاسة حيث إنه غير معرف عند $x = x_0$. وهنا نقع في حيرة من أمرنا : أيها نأخذ؟

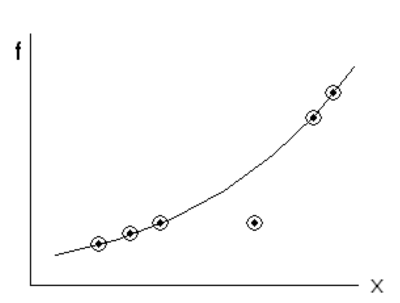
أيضا لو نظرنا للشكل (3.6) لوجدنا أن المنحنى يلائم كل البيانات عدا نقطة واحدة والتي تمثل خطأ فادحاً وعلينا إهمالها.

وعليه ومما تقدم، وقبل أن نبدأ بأي ملائمة أو تقريب علينا أن نقرر نوعية المنحنى الذي سنعمل به. أهو خط مستقيم ؟ أم قطع مكافئ؟ أو دالة تكعيبية ؟

أم حدودية من درجة أعلى ؟ أو دالة مثلثية ؟ أو دالة آسية ؟



الشكل (2.6)- ملائمة نقاط تجريبية (⊙) بعدة منحنيات



الشكل (3.6) - نقطة شاذة.

وخير قرار في هذا الصدد يأتي عادة من مصدر البيانات؛ فالمصدر الذي أتت من خلاله البيانات دائماً يكون مصدر معلومات جيد لنا لاختيار الشكل العام للمنحني؛ فمثلا في مجال الفيزياء النووية لو اهتمينا بالقطاعات النووية عند دراستنا للتفاعلات النووية يكون عادة القطاع ممثلا بحدوديات لجاندر (Legendre polynomials)؛ كما أنه لو علمنا بأن البيانات بمسألة ما هي بيانات عن حركة مقذوفة فإنه وبالتأكيد يكون المنحى الملائم الجيد عبارة عن قطع مكافئ كما هو ثابت بعلم الميكانيكا..... . و.هكذا.

في المعتاد نستعمل حدوديات. فلو كان لدينا $n+1$ من النقاط عند $x_o,.....,x_n$ وتقابلها قيم الدالة $f(x_o), f(x_1),....., f(x_n)$ وقرنا تقريبها بحدودية درجتها m فإنه توجد ثلاث حالات :

1) $m=n$

أي أن الحدودية الاستكمالية $\phi_n(x)$ تمر بالضبط بكل النقاط، غير أن هذا؛ وكما ذكرنا، غير وارد حيث إنه ربما تكون القيم غير دقيقة.

2) $m>n$

وهذه حالة لن تستعمل وذلك لنقص في عدد النقاط ويكون المنحنى غير سلس.

3) $m < n$

هنا يكون عدد النقاط كبير بالنسبة لدرجة الحدودية وعليه يكون المنحنى تقريبياً وهذا هو المطلوب دراسته. لاحظ أنه ربما لن يمر المنحنى بأي نقطة بالجدول ولكن سيكون المنحنى. سلساً.

عليه نفترض الحالة الثالثة أي أنه توجد $n+1$ من النقاط والمطلوب تقريبها بحدودية من الدرجة m ($p_m(x)$) (حيث $m < n$) و

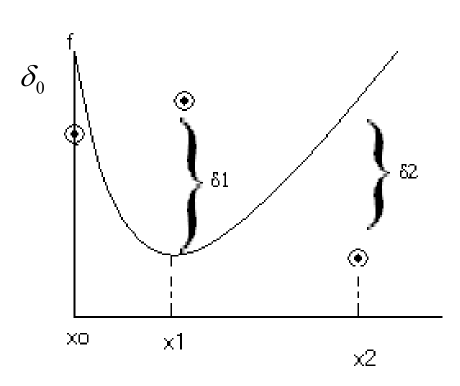
$$p_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} ... + a_1 x + a_o \qquad ...... (1.6)$$

وحيث تساوي $p_m(x_i)$ تقريباً القيم بالجدول عند x_i (أي $f(x_i)$) :

وإذا كان الانحراف هو δ_i (Deviation) للقيمة عند x_i عن المنحنى فإنه يمكننا كتابة:

$$p_m(x_i) - f(x_i) = \delta_i \qquad i = 1, ..., n \qquad ...... (2.6)$$

والشكل (4.6) يوضح مثل هذه الانحرافات لثلاث نقاط .



الشكل (4.6)- توضيح للانحرافات.

الآن وبعد أن قمنا بتعريف الانحرافات نقرر ما معنى ((أجود ملائمة أو تقريب)) (Best Fit!?). هل يعني هذا أن تكون كل δ_i صفراً؟ هذا غير ممكن عموماً. أو هل نجعل $\sum \delta_i = 0$ ؟ هذا ممكن غير أنه ليس المطلوب!؟

أيضا لا يمكن أن نجعل $\sum|\delta_i| = 0$ حيث إن ذلك يعني أن نجعل $|\delta_i| = 0$ لكل i

عندئذ؟ وهذا غير ممكن كما أسلفنا؟ ولكن نستطيع أن نجعل هذا الجمع أقل ما يمكن، بيد أن التعامل مع القيم المطلقة صعب نوعاً ما وعليه ربما نتخذ القرار أن نجعل الجمع:

$$\sum_i \delta_i^2 = \delta_0^2 + ... + \delta_n^2 \qquad ...... (3.6)$$

أصغر ما يمكن. هذه الطريقة سهلة في التعامل كما أنها تتميز بإبعاد الانحرافات الكبيرة ما أمكن ذلك .

هذه الطريقة تسمى بطريقة ملائمة المنحنيات باستخدام المربعات الصغرى (least-Squares Curve Fitting) أو باختصار طريقة المربعات الصغرى. وهي شائعة جداًً في العديد من المجالات.

2.6 ملائمة المنحنيات (Curve Fitting)

لكي يكون عملنا شاملاً وعاماً وبدلاً من استخدام حدوديات ؛ دعنا نستخدم أي فئة من الدوال:

$$\{g_i(x)\}_{i=0}^{i=m}$$

وأن نضع:

$$p_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \, g_i(x) \qquad \text{...... (4.6)}$$

وحيث $g_i(x)$ أي دوال معرفة فمثلا في حالة استعمال حدوديات تكون:

$$g_i(x) = x^i \qquad i = 0,1,.....,n$$

كما نطلب من الدوال $g_i(x)$ أن تكون مستقلة خطياً أي أنه لا تعتمد إحداها على الأخرى وذلك في أبسط معنى للاستقلالية الخطية. (لاحظ أن $1, x, ...x^m$ مستقلة خطيا).

الآن نحسب الانحرافات: $\delta_i = p_m(x_i) - f(x_i) \qquad i = 0,...,n$

ونطلب أن يكون المقدار $\sum_{i=0}^{n} \delta_i^2$ قيمة صغرى.

أو أن:

$$\sum_{i=0}^{n} \delta_i^2 = \sum_{0}^{n} \left[p_m(x_i) - f(x_i) \right]^2$$

$$= \sum_{0}^{n} \left[a_m g_m(x_i) + ... + a_o g_o(x_i) - f(x_i) \right]^2 = \text{قيمة صغرى}$$

لاحظ أن الأشياء غير المعلومة في هذه المعادلة هي المعاملات a_i ؛كما أن الجمع دالة في هذه الـ $m+1$ من المعاملات؛ وعليه لكي نحصل على القيمة الصغرى نضع :

$$\frac{\partial}{\partial a_o} \left(\sum_{i=0}^{n} \delta_i^2 \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \left(\sum_{i=0}^{n} \delta_i^2 \right) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial}{\partial a_m} \left(\sum_{i=0}^{n} \delta_i^2 \right) = 0$$

أو نضع عموماً:

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\sum_{i=0}^{n}\delta_i^2\right)=0 \qquad j=0,1,....,m \qquad ......(5.6)$$

وهذا يعني أن:

$$\sum_{i=0}^{n}2\delta_i\frac{\partial\delta_i}{\partial a_j}=0$$

أو أن:

$$\sum_{i=0}^{n}\delta_i\frac{\partial\delta_i}{\partial a_j}=0 \qquad ......(6.6)$$

وحيث أن:

$$\delta_i = a_m g_m(x_i)+.....+a_j g_j(x_i)+.....+a_o g_o(x_i)-f(x_i) \qquad ......(7.6)$$

فإن:

$$\frac{\partial\delta_i}{\partial a_j}=g_j(x_i) \qquad ......(8.6)$$

وهكذا تصبح المعادلة (6.6) على النحو:

$$\sum_{i=0}^{n}\delta_i g_j(x_i)=0 \quad j=0,1,2,...m \qquad ......(9.6)$$

أو بطريقة أخرى:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(p_m(x_i)-f(x_i)\right)g_j(x_i)=0 \qquad ......(10.6)$$

الآن نستخدم (4.6) و (10.6) لنحصل على:

$$\sum_k a_k\left(\sum_i g_k(x_i)g_j(x_i)\right)=\sum f(x_i)g_j(x_i)$$

ولو وضعنا:

$$\alpha_{kj} = \sum_i g_k(x_i) g_j(x_i) \qquad k = 0,1,....,m$$

لكانت المعادلات في صورتها النهائية :

$$\sum_k a_k \alpha_{kj} = \sum f(x_i) g_j(x_i) \qquad j = 0,1,....,m \qquad ...... (11.6)$$

الآن a_k غير معلومة ونستطيع حسابها إذا زودنا بجدول بالبيانات x_i و $f(x_i)$ وإذا عرفنا الدوال المستخدمة للملائمة.

لا ننسى أن $\alpha_{kj} = \alpha_{jk}$ ؛أي أنه يوجد تماثل في مصفوفة هذه المعاملات وهذا يوفر علينا الجهد .و يقلل من العمليات إلى النصف.

مثال (1.6)

لنفترض أننا بدأنا بدراسة سقوط جسم و أن .العلاقة بين الارتفاع $h(t)$ والزمن t معطاة بالصيغة $h(t) = 1100 - 16t^2$ [حيث كان الجسم على علو 1100 عند لحظة البدء].

من هذه العلاقة نستطيع حساب الارتفاع للأزمنة $t = 0,1,2,3,4$ والجدول (2.6) يبين هذه القيم .

ولنفترض الآن أننا بدأنا بمعلومات غير دقيقة كأن قربنا الأرقام لأقرب عشرة؛ عندئذ تكون البيانات كما بالجدول (3.6).

الجدول (2.6)- القيم الدقيقة لـ h المثال (1.6)

t	h
0	1100
1	1084
2	1036
3	956
4	844

الجدول (3.6)- قيم h غير الدقيقة (المثال(1.6))

t	h
0	1100
1	1080
2	1040
3	960
4	840

ومن ثم نستعمل التقريب بطريقة المربعات الصغرى، ومن خلال المسألة الفيزيائية يكون الشكل للمنحني عبارة عن قطع مكافئ وعليه تكون حدودية الملائمة هي:

$$p_2(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_o$$

أو أن:

$$g_2(t) = t^2$$
$$g_1(t) = t$$
$$g_o(t) = 1$$

لا ننسى أيضا أن $n + 1 = 5$ أو أن $n = 4$.

وهكذا نرى أن:

$$\alpha_{00} = \sum_{i=0}^{4} g_0(t_i) g_0(t_i) = 1+1+1+1+1 = 5$$

$$\alpha_{01} = \alpha_{10} = \sum_{i=0}^{4} g_1(t_i) g_0(t_i) = \sum t_i = 10$$

$$\alpha_{02} = \alpha_{20} = \sum_{i=0}^{4} g_2(t_i) g_0(t_i) = \sum t_i^2 = 30$$

$$\alpha_{11} = \sum_{i=0}^{4} g_1(t_i) g_1(t_i) = \sum t_i^2 = 30$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \sum_{i=0}^{4} g_1(t_i) g_2(t_i) = \sum t_i^3 = 100$$

$$\alpha_{22} = \sum_{i=0}^{4} g_2^2(t_i) = \sum t_i^4 = 354$$

وتكون المعادلات المطلوب حلها هي:

$$\alpha_{00} a_0 + \alpha_{01} a_1 + \alpha_{02} a_2 = \sum f(t_i) g_0(t_i)$$

$$\alpha_{10} a_0 + \alpha_{11} a_1 + \alpha_{12} a_2 = \sum f(t_i) g_1(t_i)$$

$$\alpha_{20} a_0 + \alpha_{21} a_1 + \alpha_{22} a_2 = \sum f(t_i) g_2(t_i)$$

أو أن:

$$5 a_0 + 10\, a_1 + 30 a_2 = 5020$$
$$10 a_0 + 30\, a_1 + 100 a_2 = 9400$$
$$30 a_0 + 100\, a_1 + 354 a_2 = 27320$$

وبحلها نجد أن:

$$a_0 = 1097.7143$$
$$a_1 = 4.5734$$
$$a_2 = -17.1429$$

أي أن المنحنى يعطى بالعلاقة:

$$p_2(x) = -17.1429t^2 + 4.573t + 1097.7143$$

نقارن الآن بين البيانات المعطاة و البيانات النظرية التي تم الحصول عليها بالملائمة من خلال الجدول (4.6).

الجدول (4.6) - مقارنة بين قيم h المختلفة

الزمن t	دقيقة h	غير دقيقة h	h بطريقة المربعات الصغرى
0	1100	1100	1097.7
1	1084	1080	1085.1
2	1036	1040	1038.3
3	956	960	957.1
4	844	840	841.7

ومنه نرى أن طريقة الملائمة بالمربعات الصغرى أعطت تقريباً معقولا بل وحاولت أن توازن بين الأخطاء، كما نلاحظ وجود أربع (من خمس) قيم قد أعطت تقريبا للقيم الحقيقية أحسن من القيم غير الدقيقة (المقربة إلى أقرب عشرة).

نلاحظ أيضا أن التقريب الذي حصلنا عليه يصلح لكل القيم x التي تقع في مدى الجدول ولا يوجد لدينا ما يؤكد أننا نستطيع حساب h عند $x = 8$ مثلا!؟

3.6 الانكفاء الخطي (Linear Regression)

في هذه الحالة

$$p_1(x) = a + bx$$

و

$$s \equiv \sum_k \delta_1^2 = \sum (y_i - a - bx_i)^2 \qquad \text{...... (12.6)}$$

وبوضع

$$\frac{\partial s}{\partial b} = 0 \quad , \quad \frac{\partial s}{\partial a} = 0$$

نحصل على:

$$\sum (y_i - a - bx_i)(-1) = 0$$

و

$$\sum (y_i - a - bx_i)(-x_i) = 0$$

أو أن:

$$na + b\left(\sum x_i\right) = \sum y_i$$

$$a\left(\sum x_i\right) + b\left(\sum x_i^2\right) = \sum x_i y_i$$

بحل هاتين المعادلتين في a و b نجد أن:

$$a = \frac{\left(\sum y_i\right)\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i y_i\right)}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad \text{...... (13.6)}$$

$$b = \frac{n\sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad ......(14.6)$$

وهكذا بحصولنا على a و b نحصل على التقريب $y = a + bx$ ؛وهذه المعادلة تعرف بالملائمة الخطية أو الانكفاء الخطي لـ y على x .

مثال (2.6)

لو كانت لدينا البيانات بالجدول (5.6).

الجدول (5.6)

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

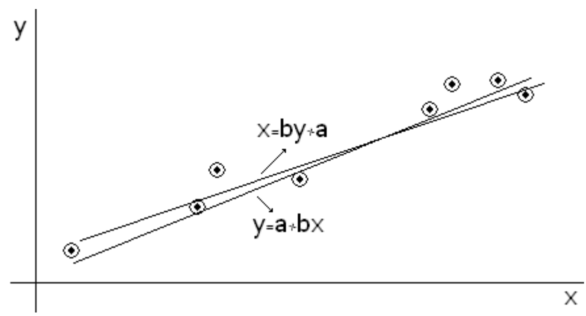
وأردنا ملائمة هذه البيانات خطياً فإنه يمكننا تكوين الجدول التالي:

x	y	x^2	xy
1	1	1	1
3	2	9	6
4	4	16	16
6	4	36	24
8	5	64	40
9	7	81	63
11	8	121	88
14	9	196	126
$\sum x_i = 56$	$\sum y_i = 40$	$\sum x_i^2 = 524$	$\sum x_i y_i = 364$

ومن هذا الجدول الأخير نستطيع حساب a و b حيث نحصل على $a = 6/11$ و $b = 7/11$ أي أن المنحنى هو:

$$y = \frac{6}{11} + \frac{7}{11}x$$

والشكل (5.6) يوضح النقاط التجريبية والمنحنى الملائم . لاحظ أن الحالة في هذا المثال حسبت بحيث كانت الأخطاء هي في قيم y ،أما قيم x فهي دقيقة ومضبوطة.



الشكل (5.6)- الانكفاء الخطي لـ x على y ولـ y على x .

غير أنه يمكن أن تكون الأخطاء بقيم x بدلا وقيم y مضبوطة. في هذه الحالة الأخيرة نضع :

$$x = by + a$$

وبنفس الطريقة نحسب a و b حيث:

$$a = \frac{\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i^2\right) - \left(\sum y_i\right)\left(\sum x_i y_i\right)}{n\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2}$$

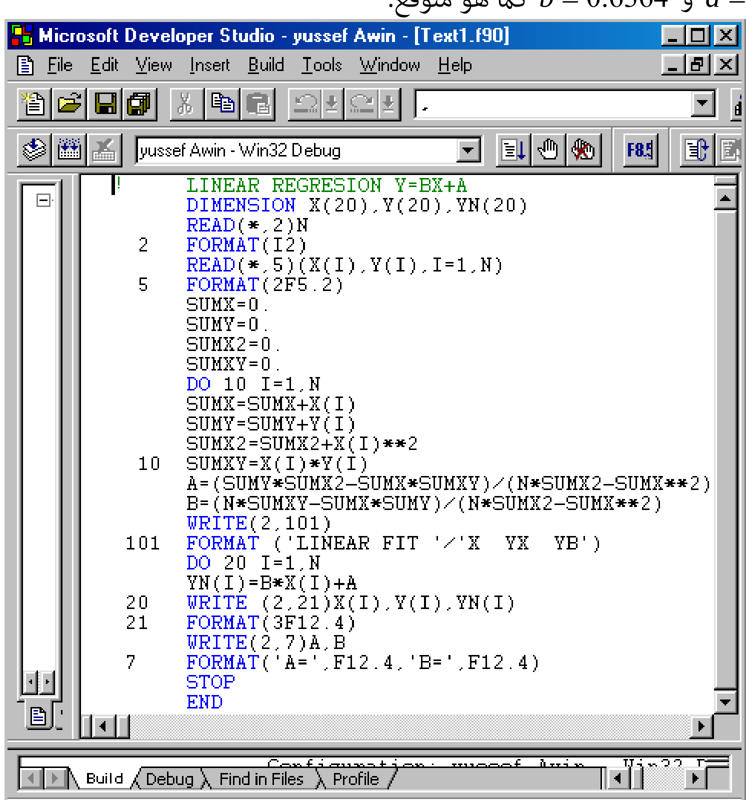
و

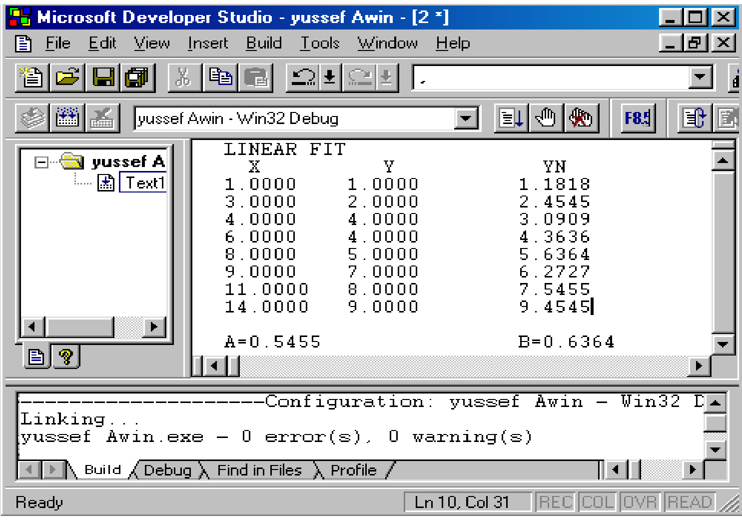
$$b = \frac{n\sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{n\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2}$$

وبذلك نحصل على الانكفاء الخطي لـ x على y .

ويكون عندئذ $a = -\frac{1}{2}$ و $b = \frac{3}{2}$. أنظر الشكل (5.6).

يمكننا أيضا كتابة برنامج للانكفاء الخطي كما هو موضح بالشكل (6.6) والحصول على النتائج $a = 0.5455$ و $b = 0.6364$ كما هو متوقع.





الشكل (6.6)- برنامج الانكفاء الخطي بنتائجه .

4.6 الدوال الحدودية

هنا نضع

$$y = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + ... + a_1 x + a_o$$

و

$$s = \sum \left(y_i - a_m x_i^m - .... - a_o \right)^2 \qquad ...... (15.6)$$

وبتفاضل المعادلة (15.6) بالنسبة لـ a_i $(i = 0,1,......,m)$ ووضع ناتج التفاضل مساويا لصفر، نحصل على المعادلات التالية:

$$n a_o + \left(\sum x_i\right) a_1 + \ldots\ldots + \left(\sum x_i^m\right) a_m = \sum y_i$$

$$\left(\sum x_i\right) a_o + \left(\sum x_i^2\right) a_1 + \ldots\ldots + \left(\sum x_i^{m+1}\right) a_m = \sum x_i y_i$$

$$\vdots$$

$$\left(\sum x_i^p\right) a_o + \left(\sum x_i^{p+1}\right) a_1 + \ldots\ldots + \left(\sum x_i^{m+p}\right) a_m = \sum x_i^p y_i$$

$$\vdots$$

$$\left(\sum x_i^m\right) a_o + \left(\sum x_i^{m+1}\right) a_1 + \ldots\ldots + \left(\sum x_i^{2m}\right) a_m = \sum x_i^m y_i$$

والتي تسمى بالمعادلات العمودية (أو الطبيعية) وهي $m+1$ من المعادلات في $m+1$ من المجاهيل $a_0,\ldots\ldots,a_m$. وحل مثل هذه المعادلات يتم بطرق عدة إما بطريقة المحددات أو الحذف لجاوس أو غيرها [راجع الفصل الخامس].

مثال (3.6)

إذا كان الجدول (6.6) يمثل قيم الحرارة النوعية c_p للماء كدالة في درجة الحرارة وإذا أمكن تقريب هذه القيم بحدودية تكعيبية باستخدام طريقة المربعات الصغرى، فاحسب مختلف المعاملات.

الجدول (6.6)- قيم الحرارة النوعية للماء بدلالة درجة الحرارة

T	c_p	T	c_p
0	1.00762	55	0.99919
5	1.00392	60	0.99967
10	1.00153	65	1.00024
15	1.00000	70	1.00091
20	0.99907	75	1.00167
25	0.99852	80	1.00253
30	0.99826	85	1.00351
35	0.99818	90	1.00461
40	0.99828	95	1.00586
45	0.99849	100	1.00721
50	0.99878		

نلاحظ أن $n = 21$ وأن $m = 3$.

و هكذا تكون المعادلات العمودية لهذا المثال هي:

$$21a_o + \left(\sum x_i\right)a_1 + \left(\sum x_i^2\right)a_2 + \left(\sum x_i^3\right)a_3 = \sum y_i$$

$$\left(\sum x_i\right)a_o + \left(\sum x_i^2\right)a_1 + \left(\sum x_i^3\right)a_2 + \left(\sum x_i^4\right)a_3 = \sum x_i y_i$$

$$\left(\sum x_i^2\right)a_o + \left(\sum x_i^3\right)a_1 + \left(\sum x_i^4\right)a_2 + \left(\sum x_i^5\right)a_3 = \sum x_i^2 y_i$$

$$\left(\sum x_i^3\right)a_o + \left(\sum x_i^4\right)a_1 + \left(\sum x_i^5\right)a_2 + \left(\sum x_i^6\right)a_3 = \sum x_i^3 y_i$$

الآن بحل هذه المعادلات نحصل عل قيم a_o, a_1, a_2, a_3 (وحيث نستخدم الجدول (6.6))

و

$$c_p = 1.00653 - 0.00051T + 0.0000087T^2 - 0.000000036T^3$$

(لاحظ أننا أشرنا هنا إلى درجة الحرارة بـ x و الحرارة النوعية بـــ y)

5.6 دوال أخرى

كثيرا ما يكون الانكفاء الخطي غير كاف وتكون الدالة التقريبية عبارة عن قطع ناقص مثلاً أو منحنى أسي أو مثلثي . . . الخ .

وبعض هذه الدوال المهمة ، والتي توجد من ضمن ما يواجه القارئ من حين لآخر أثناء دراسته لحل مشكلة ما، تتلخص في الأقسام التالية :

أ- قطع زائدي على الشكل $y = \dfrac{1}{a+bx}$

ب- منحن أسي مثل $y = ab^x$

ج- منحنى هندسي علي النحو $y = ax^b$

د- منحنى مثلثي من النوع $y = a_o + a_1 \cos \omega x$

أو من النوع الأكثر عمومية:

$$y = a_o + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \right)$$

وكما ذكرنا في السابق مصدر البيانات هو خير دليل لاختيار المنحى المناسب كما أن رسم المنحنى من خلال النقاط المعطاة يخبرنا أيضا بالتقريب المناسب، فمثلا لو كان $\log y$ خطية بالنسبة لـ x فهذا يعني أن نختار الدالة الأسية للملائمة والتقريب، أما إذا كانت البيانات بحيث كانت $\log y$ خطية بالنسبة لـ $\log x$ فإننا نهتدي إلى اختيار المنحنى الهندسي؟ أما إذا كانت النقاط متذبذبة و دورية فإن الدالة المثلثية تمثل أحسن تقريب. وهكذا.

أمثلـــة

مثال (4.6)

إذا كان المنحي عبارة عن قطع زائدي فإن:

$$y = \frac{1}{a + bx} \equiv \frac{1}{z}$$

أو أن:

$$z = \frac{1}{y} = a + bx$$

وهكذا نرجع مرة أخرى للانكفاء الخطى وتكون المعادلات العمودية هي:

$$n\,a_o + \left(\sum x_i \right) b = \sum \frac{1}{y_i}$$

$$\left(\sum x_i \right) a + \left(\sum x_i^2 \right) b = \sum \frac{x_i}{y_i}$$

وبمعرفة (x_i, y_i) نستطيع حساب a و b.

مثال (5.6)

دالة مثلثية من النوع: $y = a + b\cos \omega x$

نحسب الجمع:

$$s = \sum \left(y_i - a - b\cos \omega x_i \right)^2$$

ثم نحسب المعادلات العمودية:

$$na + b\sum \cos \omega x_i = \sum y_i$$

$$\left(\sum \cos \omega x_i \right) a + b\sum \cos^2 \omega x_i = \sum y_i \cos \omega x_i$$

ومنها نحسب a و b عند معرفة النقاط (x_i, y_i).

مثال (6.6)

المنحني أسي: أي أن $y = ab^x$.

نأخذ لوغاريتم الطرف لنجد أن: $\ln y = \ln a + x \ln b$

ولو وضعنا $B = \ln b \quad , \quad A = \ln a \quad , \quad z = \ln y$.

فإننا نحصل على: $z = A + Bx$

وهكذا نرجع، مرة أخرى للانكفاء الخطي.

هنا نحسب الجمع: $s = \sum \left(\ln y_i - A - Bx_i \right)^2$

وتكون المعادلات العمودية:

$$n\,A + \left(\sum x_i \right) B = \sum \ln y_i$$

$$\left(\sum x_i \right) A + \left(\sum x_i^2 \right) B = \sum x_i \ln y_i$$

الآن نوجد الحلول لـ A و B ثم نحسب a و b كالآتي:

$$a = \exp \left\{ \left[\sum \ln y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i \ \ln y_i \right] \Big/ \left[n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2 \right] \right\}$$

$$b = \exp \left\{ \left[n \sum x_i \ \ln y_i - \sum x_i \sum \ \ln y_i \right] \Big/ \left[n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2 \right] \right\}$$

وباعتبار الجدول (7.6) المبين أسفله والذي يمكن أن يمثل بمنحنى أسي ؛ نكتب البرنامج الموضح بالشكل (7.6) ومن خلاله نحصل على $y \cong 3.2^x$.

الجدول (7.6)- المثال(6.6)

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4
y	3	4	6	9	12	17	24	33	48

6.6 الانكفاء المتعدد (Multiple Regression)

في كثير من الحالات يكون لدينا ببيانات معملية تحتوي على أكثر من متغير كأن تعتمد الدالة تحت الدراسة على الحرارة والضغط معا مثلا.

لتكن $z = f(x, y)$

والبيانات هي n من النقاط

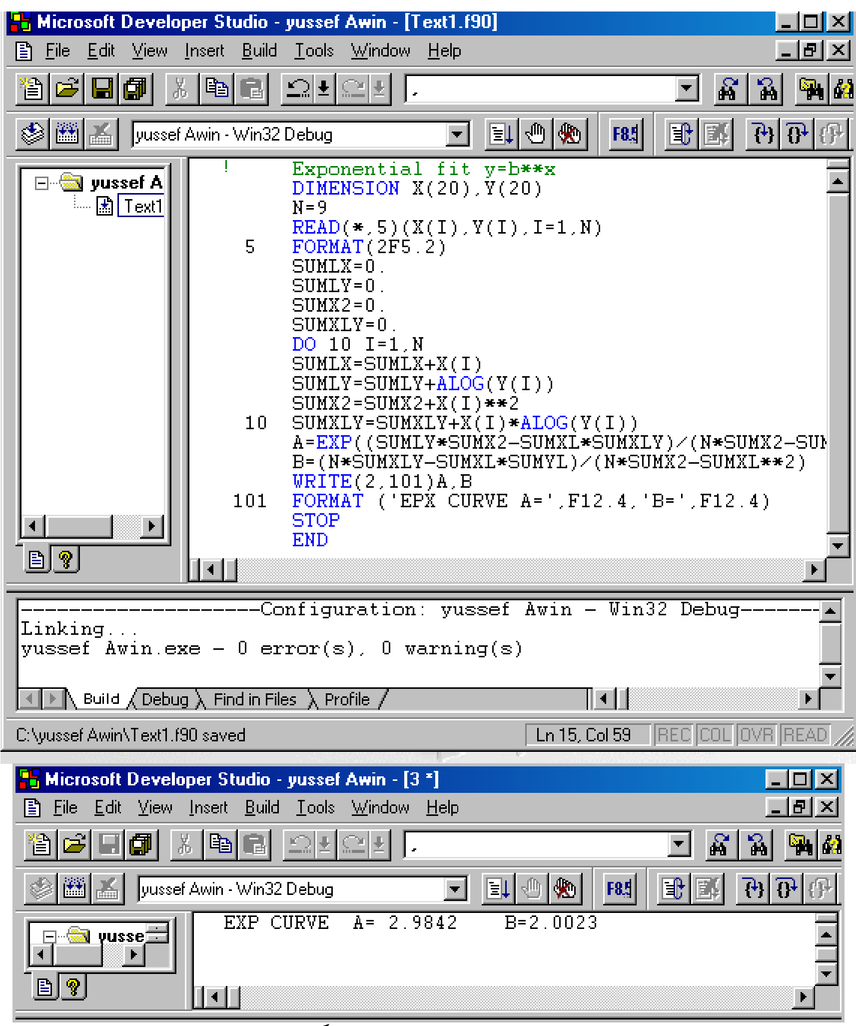
$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ..., (x_n, y_n, z_n)$$

وإذا افترضنا للبساطة والتوضيح أننا نتعامل مع الانكفاء الخطي المتعدد أي أن:

$$z = A + Bx + Cy$$

فإننا نحسب الانحرافات ونحسب:

$$s = \sum (z_i - A - Bx_i - Cy_i)^2$$



الشكل (7.6)- برنامج الانكفاء الأسي متبوعاً بنتيجة قيم A و B.

ومرة أخرى نفاضل بالنسبة للمعاملات ثم نضع ناتج التفاضل مساوياً للصفر لنحصل على المعادلات العمودية:

$$n\,A + \left(\sum x_i\right)B + \left(\sum y_i\right)C = \sum z_i$$

$$\left(\sum x_i\right)A + \left(\sum x_i^2\right)B + \left(\sum x_i y_i\right)C = \sum x_i z_i$$

$$\left(\sum y_i\right)A + \left(\sum x_i y_i\right)B + \left(\sum y_i^2\right)C = \sum x_i z_i$$

وبحساب A , B و C من هذه المعادلات نحصل على المنحنى التقريبي المطلوب.

نود أن نلاحظ أنه لن نتعامل كثيراً مع الانكفاء المتعدد ولهذا مررنا مروراً سريعاً بهذا الموضوع.

أمثلة متنوعة

مثال (7.6)

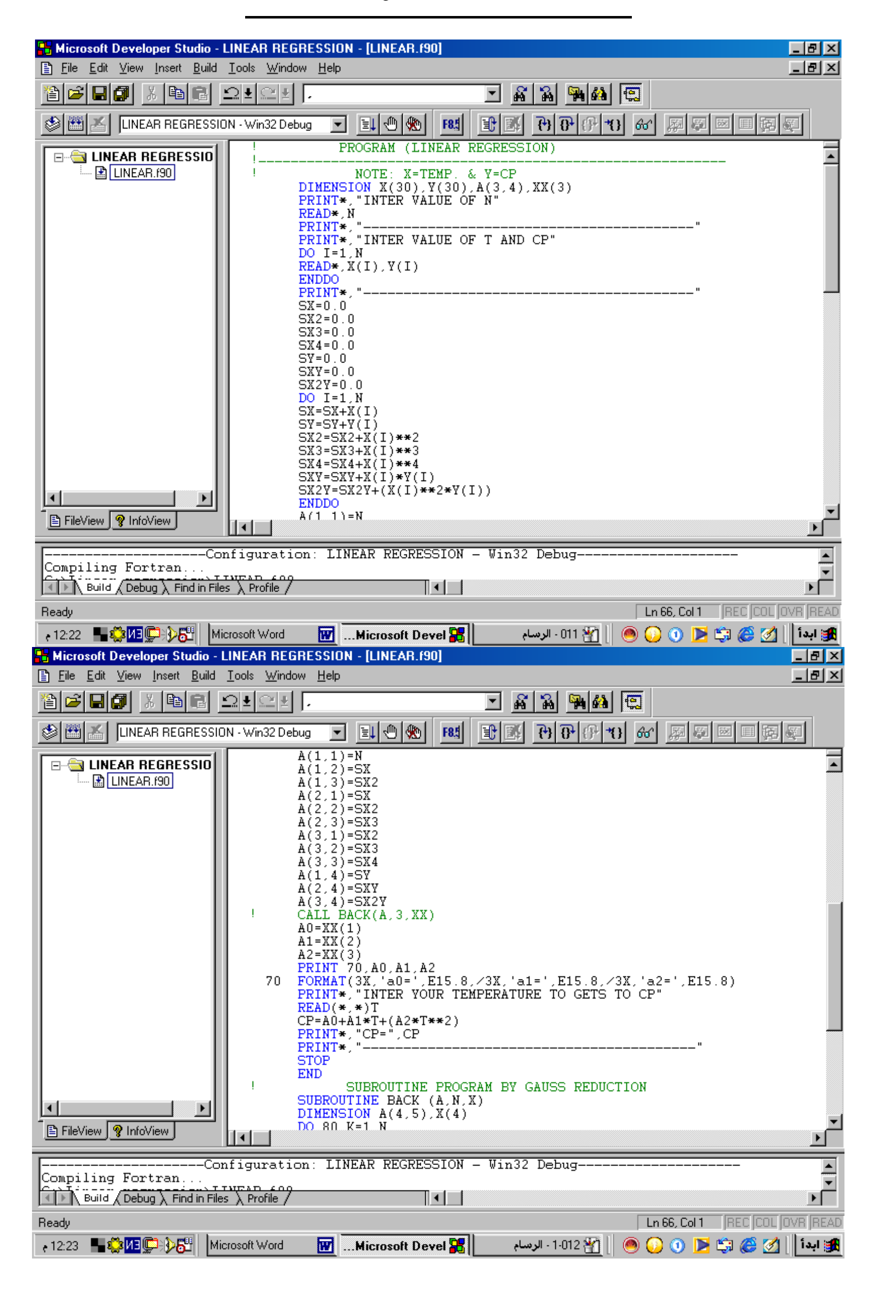
أعد حل المثال (3.6) بافتراض أن الحرارة النوعية للماء هي دالة تربيعية في درجة الحرارة.

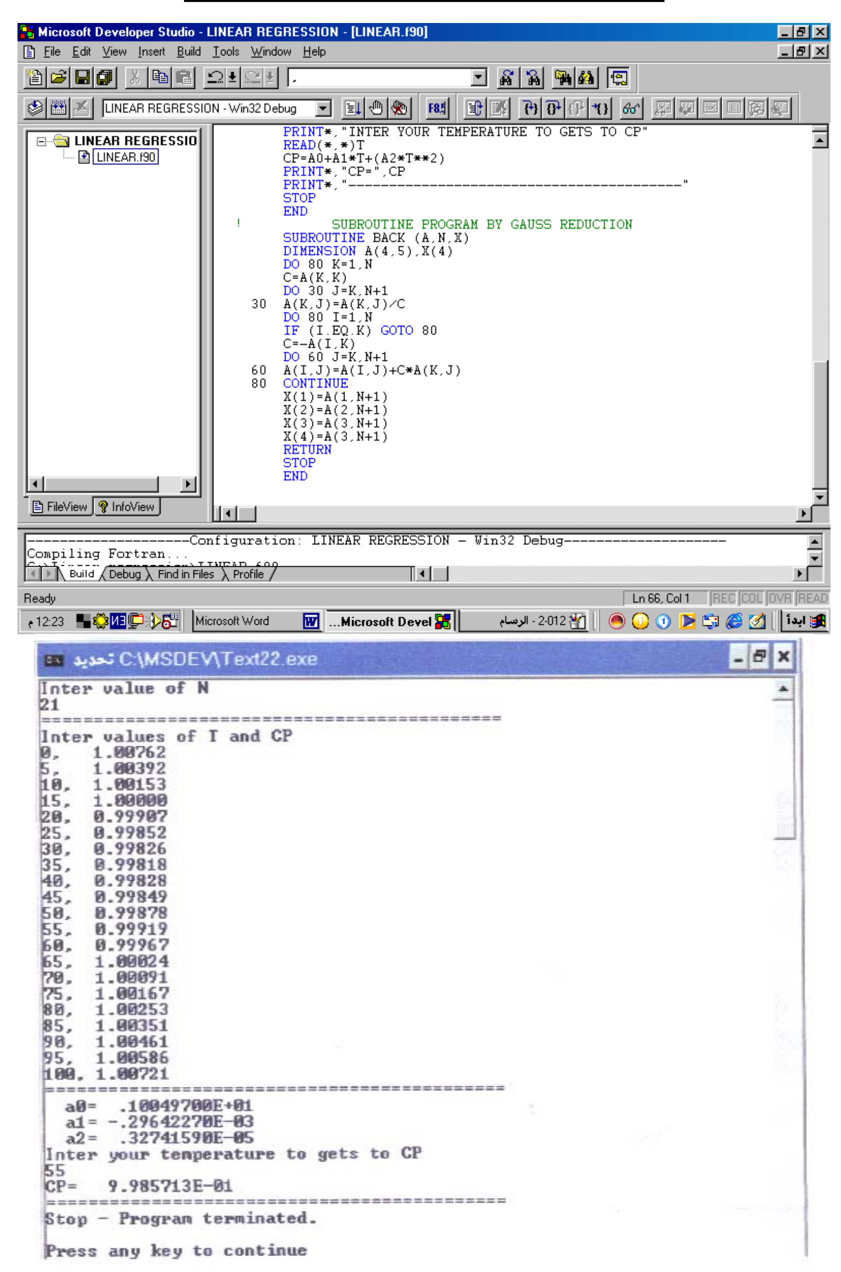
الحل:

عدد النقاط هنا هو 21، كما أن منحنى الملائمة هو من الشكل:

$$C_p = a_o + a_1 T + a_2 T^2$$

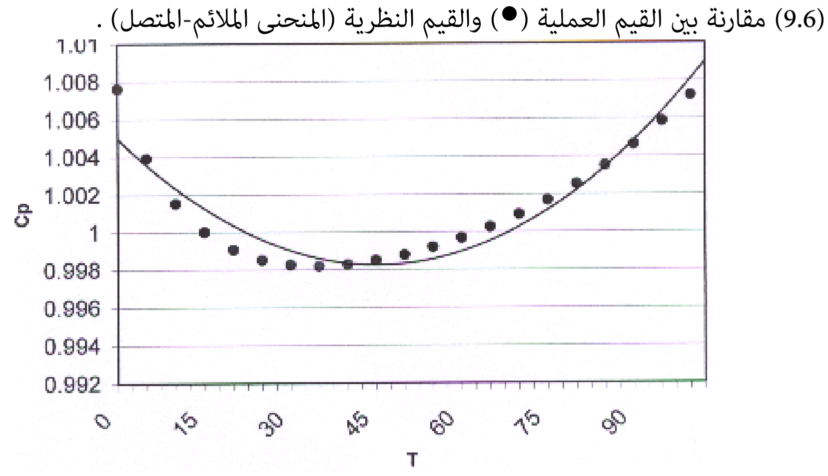
عليه بعد كتابة الخوارزمية المناسبة و البرنامج الحاسوبي نحصل على النتائج بالشكل (8.6).


Microsoft Developer Studio - LINEAR REGRESSION - [LINEAR.f90]
File Edit View Insert Build Tools Window Help
LINEAR REGRESSION - Win32 Debug
LINEAR REGRESSIO
LINEAR.f90
!   PROGRAM (LINEAR REGRESSION)
!--
!   NOTE: X=TEMP. & Y=CP
DIMENSION X(30),Y(30),A(3,4),XX(3)
PRINT*,"INTER VALUE OF N"
READ*,N
PRINT*,"---"
PRINT*,"INTER VALUE OF T AND CP"
DO I=1,N
READ*,X(I),Y(I)
ENDDO
PRINT*,"---"
SX=0.0
SX2=0.0
SX3=0.0
SX4=0.0
SY=0.0
SXY=0.0
SX2Y=0.0
DO I=1,N
SX=SX+X(I)
SY=SY+Y(I)
SX2=SX2+X(I)**2
SX3=SX3+X(I)**3
SX4=SX4+X(I)**4
SXY=SXY+X(I)*Y(I)
SX2Y=SX2Y+(X(I)**2*Y(I))
ENDDO
A(1,1)=N
FileView InfoView
--------------------Configuration: LINEAR REGRESSION - Win32 Debug--------------------
Compiling Fortran...
Build Debug Find in Files Profile
Ready
Ln 66, Col 1 REC COL OVR READ
12:22
Microsoft Word
...Microsoft Devel
Microsoft Developer Studio - LINEAR REGRESSION - [LINEAR.f90]
File Edit View Insert Build Tools Window Help
LINEAR REGRESSION - Win32 Debug
LINEAR REGRESSIO
LINEAR.f90
A(1,1)=N
A(1,2)=SX
A(1,3)=SX2
A(2,1)=SX
A(2,2)=SX2
A(2,3)=SX3
A(3,1)=SX2
A(3,2)=SX3
A(3,3)=SX4
A(1,4)=SY
A(2,4)=SXY
A(3,4)=SX2Y
!   CALL BACK(A,3,XX)
A0=XX(1)
A1=XX(2)
A2=XX(3)
PRINT 70,A0,A1,A2
70 FORMAT(3X,'a0=',E15.8,/3X,'a1=',E15.8,/3X,'a2=',E15.8)
PRINT*,"INTER YOUR TEMPERATURE TO GETS TO CP"
READ(*,*)T
CP=A0+A1*T+(A2*T**2)
PRINT*,"CP=",CP
PRINT*,"---"
STOP
END
!   SUBROUTINE PROGRAM BY GAUSS REDUCTION
SUBROUTINE BACK (A,N,X)
DIMENSION A(4,5),X(4)
DO 80 K=1,N
FileView InfoView
--------------------Configuration: LINEAR REGRESSION - Win32 Debug--------------------
Compiling Fortran...
Build Debug Find in Files Profile
Ready
Ln 66, Col 1 REC COL OVR READ
12:23
Microsoft Word
...Microsoft Devel



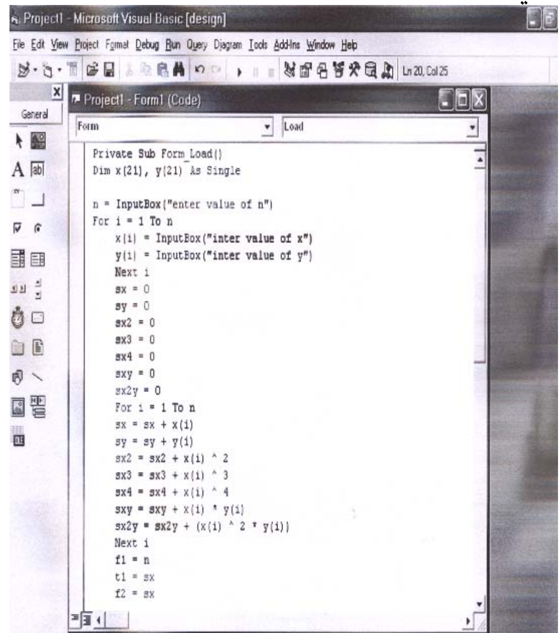
الشكل (8.6) برنامج بلغة الفوتوران و نتائجه- مثال (7.6)

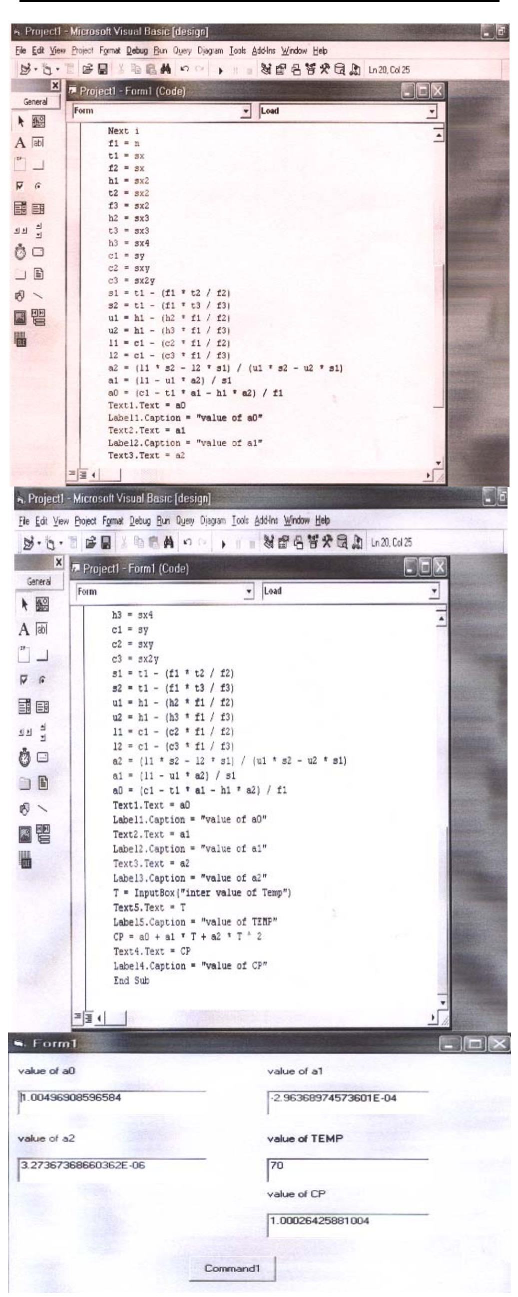
و توضح النتائج بأن الحرارة النوعية عند $T = 55$ هي $C_p = 0.9985713$ هذا ويبين الشكل (9.6) مقارنة بين القيم العملية (●) والقيم النظرية (المنحنى الملائم-المتصل) .



الشكل (9.6) مقارنة بين القيم العملية (●) والقيم النظرية.

بالشكل (10.6) نعطي نفس الحسابات ولكن بلغة بيسك المرئية.





الشكل (10.6) نفس الحسابات بلغة بيسك المرئية-المثال(7.6)

مثال (8.6)

قذفت مقذوفة بزاوية معينة فإذا كانت العلاقة بين ارتفاعها y والمسافة الأفقية x معطاة بالبيانات بالجدول (8.6) أسفله؛ فاحسب $y(2.5)$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

الجدول(8.6)

x	0	1	2	3	4
y	0	8	19	32	50

الحل:

حيث أن العلاقة بين x و y هي حدودية من الدرجة الثانية، عليه نقوم باستعمال الملائمة بواسطة المربعات الصغرى وكتابة البرنامج الموضح بالشكل (11.6) [وهو برنامج مكتوب بلغة C] لنحصل على $y(2.5) = 25 \cdot 25$ [أنظر الشكل (12.6)].

```
#include<math.h>
#include<conio.h>
#include<iostream.h>

main()
{
float
d[3][3],d2[3][3],s[7],x[5],y[5],x4[5],x3[5],x2[5],yx[5],y2x[5],det[3],m[3]
,ddet,a,b,c,yy,xx;

int i,j,k;

clrscr();
cout<<"ENTER VALUES FOR X AND Y?"<<'\n';
for(i=0;i<5;++i)
{
cin>>x[i]>>y[i];
```

```
yx[i]=x[i]*y[i];
y2x[i]=y[i]*x[i]*x[i];

x4[i]=pow(x[i],4);
x3[i]=pow(x[i],3);
x2[i]=pow(x[i],2);
}

cout<<'\n'<<"input value for x?"<<'\n';
cin>>xx;


for(i=0;i<7;++i)
s[i]=0;

for(i=0;i<5;++i)
{
s[0]+=x4[i];s[1]+=x3[i];s[2]+=x2[i];s[3]+=x[i];s[4]+=y[i];s[5]+=yx[i];s[6
]+=y2x[i];
}

m[0]=s[4];
m[1]=s[5];
m[2]=s[6];

d[0][0]=5;d[0][1]=s[3];d[0][2]=s[2];

d[1][0]=s[3];d[1][1]=s[2];d[1][2]=s[1];

d[2][0]=s[2];d[2][1]=s[1];d[2][2]=s[0];

ddet=(d[0][0]*(d[1][1]*d[2][2]-d[1][2]*d[2][1]))-
(d[0][1]*(d[1][0]*d[2][2]-d[1][2]*d[2][0]))+(d[0][2]*(d[1][0]*d[2][1]-
d[1][1]*d[2][0]));



for(k=0;k<=2;++k)
{
for(i=0;i<3;++i)
for(j=0;j<3;++j)
if(j==k)
        d2[i][j]=m[i];
else
```

```
        d2[i][j]=d[i][j];

  det[k]=d2[0][0]*(d2[1][1]*d2[2][2]-d2[1][2]*d2[2][1])-
  d2[0][1]*(d2[1][0]*d2[2][2]-
  d2[1][2]*d2[2][0])+d2[0][2]*(d2[1][0]*d2[2][1]-d2[1][1]*d2[2][0]);
  }



  a=float(det[0])/float(ddet);
  b=float(det[1])/float(ddet);
  c=float(det[2])/float(ddet);

  cout<<'\n'<<'\n'<<"A="<<a<<'\n'<<"B="<<b<<'\n'<<"C="<<c<<'\n'<<'\n
  ';

  yy=a+b*xx+c*xx*xx;
  cout<<"Y="<<yy;


  }
```

الشكل (11.6) – المثال (8.6) بلغة C.

```
ENTER VALUES FOR X AND Y?
0 0
1 8
2 19
3 32
4 50

input value for x?
2.5


A=0.142857
B=6.114286
C=1.571429

Y=25.25
```

الشكل (12.6) – نتائج المثال (8.6) بلغة C.

مثال (9.6)

الجدول (9.6) أسفله يعطي درجة الحرارة الحرجة $T_c\left({}^{o}K\right)$ بدلالة الضغط $p_c(atm)$ الحرج لثمانية مركبات عضوية. فإذا افترض بأن العلاقة T_c و p_c هي علاقة تربيعية،فاحسب T_c لمثيل الأثير $p_c = 53\ atm$ وقارن بالقيمة التجريبية $T_c = 400.1\ {}^{o}K$.

الجدول(9.6)

$p_c(atm)$	44	57.1	46.6	48.4	63	35.6	71	78.5	71	78.5
$T_c({}^{0}K)$	461	594.8	508.7	560	516	467	369	513.2	369	513.2

الحل:

نكتب $T_c = a + bp_c + Cp_c^2$ ، ثم نستخدم أسلوب الملائمة بطريقة المربعات الصغرى فنكتب خوارزمية الحل ومن ثم البرنامج الموضح بالشكل (13.6). و تكون النتائج معطاة بالشكل (14.6) ومنها نرى أن:

$$T_c(53\ atm) = 524.7625$$

وهي قيمة ليست قريبة من القيمة التجريبية ولكنها تقع بين $T_c(44)$ و $T_c(57.1)$.

```
      Dimension Pc(8),Tc(8)
      WRITE(*,*)'    N    ,     PC'
      READ(*,*)N,Pc
      WRITE(*,*)'Tc'
      READ(*,*)Tc
C!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
      SUMX=0.0
      SUMX2=0.0
      SUMX3=0.0
      SUMX4=0.0
      SUMY=0.0
      SUMYX=0.0
      SUMYX2=0.0
C-------------------------------------------------------------
C-------------------------------------------------------------
      DO 10 I=1,N
      SUMX=SUMX+PC(I)
      SUMX2=SUMX2+(PC(I))**2
      SUMX3=SUMX3+(PC(I))**3
      SUMX4=SUMX4+(PC(I))**4
      SUMY=SUMY+TC(I)
      SUMYX=SUMYX+PC(I)*TC(I)
      SUMYX2=SUMYX2+TC(I)*PC(I)**2
  10  CONTINUE
      WRITE(*,*)'SUMXi,SUMXi**2,SUMXi**3,SUMXi**4, SUMYi,SUMYX,SUMYX**2'
      WRITE(*,*)SUMX,SUMX2,SUMX3,SUMX4,SUMY,SUMYX,SUMYX2
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      del=N*(SUMX2*SUMX4-SUMX3*SUMX3)-SUMX*(SUMX*SUMX4-SUMX3*SUMX2)
     &+SUMX2*(SUMX*SUMX3-SUMX2*SUMX2)
      WRITE(*,*)'DEL'
      WRITE(*,*)DEL
C****************************************************************************

      a2=(SUMY*(SUMX2*SUMX4-SUMX3*SUMX3)-SUMX*(SUMYX*SUMX4-SUMX3*SUMYX2)
     &+SUMX2*(SUMYX*SUMX3-SUMX2*SUMYX2))/DEL
      WRITE(*,*)'a2'
      WRITE(*,*)A2
C/////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

      a1=(N*(SUMYX*SUMX4-SUMX3*SUMYX2)-SUMY*(SUMX*SUMX4-SUMX3*SUMX2)
     &+SUMX2*(SUMX*SUMYX2-SUMYX*SUMX2))/DEL
      WRITE(*,*)'a1'
      WRITE(*,*)A1
C!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

      a0=(N*(SUMX2*SUMYX2-SUMYX*SUMX3)-SUMX*(SUMX*SUMYX2-SUMYX*SUMX2)
     &+SUMY*(SUMX*SUMX3-SUMX2*SUMX2))/DEL
      WRITE(*,*)'a0'
      WRITE(*,*)a0
C#############################################################################

      WRITE(*,*)'PC'
      READ(*,*)X
      TI=a2+a1*x+a0*x**2
      WRITE(*,*)'Tc from Equiation in Pro. No 19 Page 163'
      WRITE(*,*)X,TI

C^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^
      STOP
      END
```

الشكل (13.6) – المثال (9.6) بلغة فورتران 77

```
RUN
  N    ,     PC
  8          44   57.1   46.6   48.4   63   35.6   71   70.5
Tc
461    594.8   508.7   560   516   467   369   513.2_
```

```
Tc
461    594.8   508.7   560   516   467   369   513.2
SUMXi,SUMXi**2,SUMXi**3,SUMXi**4, SUMYi,SUMYX,SUMYX**2
            444.2000000            26150.1400000           1622741.0000000
  0.1053258E+009            3989.7000000
          220674.9000000         12910750.0000000
DEL
          0.2676228E+010
a2
               79.9420100
a1
               16.0697700
a0
               -0.1448477
PC
53
Tc from Equiation in Pro. No 19 Page 163
               53.0000000             524.7625000
```

الشكل (14.6) – نتائج المثال (9.6) بلغة فورتران 77

مثال (10.6)

أكتب برنامجا حاسوبيا لملائمة بيانات ما بالمنحنى :

$$y = a + b\cos x + c\sin x$$

ثم استخدم البيانات بالجدول (10.6) أسفله لحساب مختلف المعاملات؛ قارن القيم النظرية بالبيانات المعطاة بالجدول .

الجدول(10.6)

x	0	0.4	0.8	1.2	1.60	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
y	3	2.1	1.3	0.5	0	0.2	0.0	0.3	1.1	2.0	2.9

الحل:

نكتب المعادلات العمودية، ثم نكتب خوارزمية الحل ومنها نكتب البرنامج الموضح بالشكل (15.6) ومنه نحصل على النتائج بالشكل (16.6) الذي يعطي المعاملات a , b , c والقيم العملية والنظرية والخطأ في كل منها. والشكل (17.6) يوضح هذه المقارنة بيانياً.

```
                         LINEAR.CPP
#include<conio.h>
#include<stdio.h>
#include<math.h>
 main()
{
double s5=0.0,s6=0.0,s7=0.0,s8=0.0,a,b,c,A,B,C,D;
double x[50],y[50],Y[50],s1=0.0,s2=0.0,s3=0.0,s4=0.0;
int i,n;
 clrscr();
 printf ("Enter the number of points n =");
 scanf("%d",&n);
 for ( i=1; i<=n; i++)
 {
 printf ("Enter the initial value of x = ");
 scanf("%lf",&x[i]);
 printf ("Enter the initial value of y = ");
 scanf("%lf",&y[i]);
 }
 for (i=1; i<=n; i++)
 {
 s1=s1+cos(x[i]); s2=s2+sin(x[i]); s3=s3+y[i]*sin(x[i]);
 s4=s4+y[i]*cos(x[i]);
s5=s5+sin(x[i])*cos(x[i]);s6=s6+y[i];
 s8=s8+pow(sin(x[i]),2); s7=s7+pow(cos(x[i]),2);
 }
D=((n*s7*s8)+(s1*s5*s2)+(s2*s1*s5))-((s1*s1*s8)+(n*s5*s5)
+(s2*s7*s2));
a=((s6*s7*s8)+(s1*s5*s3)+(s2*s4*s5))-((s1*s4*s8)+(s6*s5*s
5)+(s2*s7*s3));
b=((n*s4*s8)+(s6*s5*s2)+(s2*s1*s3))-((s6*s1*s8)+(n*s5*s3)
+(s2*s4*s2));
c=((n*s7*s3)+(s1*s4*s2)+(s6*s1*s5))-((s1*s1*s3)+(n*s4*s5)
+(s6*s7*s2));
A=a/D;   B=b/D;   C=c/D;
printf ("\n\n a = %lf  , b = %lf  , c = %lf\n\n ",A,B,C);
printf ("Linear            Y             YN
ERROR  \n\n ");
for (i=1; i<=n; i++)
{
Y[i]=A+B*cos(x[i])+C*sin(x[i]);
printf ("%lf      %lf      %lf     ;",x[i],y[i],Y[i]);
Y[i]=Y[i]-y[i];
printf ("      %lf   \n",Y[i]);
}
  getche();
    return(0);
}
```

الشكل (15.6) – المثال (10.6) بلغة C.

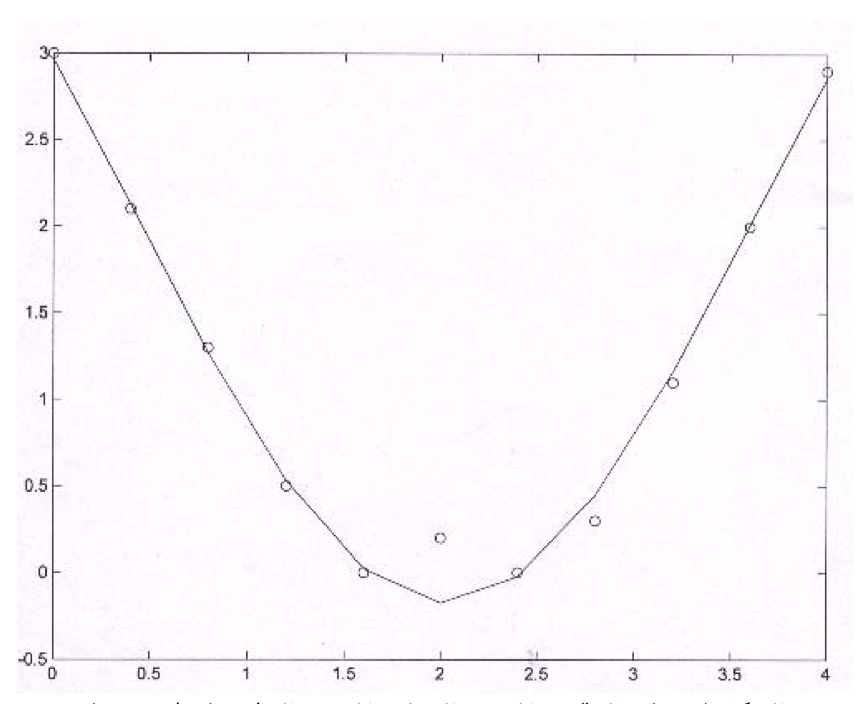
```
                    results1.txt

 a = 2.006167   , b = 0.956807   , c = -1.904491

 Linear          Y             YN               ERROR

0.000000     3.000000     2.962973     ;     -0.037027
0.400000     2.100000     2.145800     ;      0.045800
0.800000     1.300000     1.306582     ;      0.006582
1.200000     0.500000     0.577813     ;      0.077813
1.600000     0.000000     0.074550     ;      0.074550
2.000000     0.200000     -0.123754    ;     -0.323754
2.400000     0.000000     0.014210     ;      0.014210
2.800000     0.300000     0.466661     ;      0.166661
3.200000     1.100000     1.162165     ;      0.062165
3.600000     2.000000     1.990919     ;     -0.009081
4.000000     2.900000     2.822080     ;     -0.077920
```

الشكل (16.6) – نتائج المثال (10.6) بلغة C.



الشكل (17.6) مقارنة بين المنحنى العملي والمنحنى النظري (خط مستمر) للمثال (10.6).

7.6 الأخطاء التجريبية (Experimental Error).

في كثير من التجارب المعملية تكون الأخطاء عادة صادرة عن الجهاز الذي نقيس به، أي أن السؤال يتعلق بمدى الدقة في الجهاز وليست في الكمية المقاسة. وهذا يعني كون القياسات غير مؤكدة في فترة ما والتي عادة ما نرمز لها بالرمز σ_i حيث i تدل على رقم القيمة المقاسة. وتكون هذه القيم أحيانا متساوية وأحيانا مختلفة وذلك بالاعتماد على التجربة المقامة.

إلى جانب الأخطاء التجريبية، أو المعملية، توجد الأخطاء الإحصائية والتي تنتج عن طبيعة إحصائية من ملاحظات واستدلالات وغيرها. وهذه عادة تؤخذ على أنها:

$$\sigma_i = \sqrt{y_i}$$

وفي حالة وجود أخطاء تجريبية أو إحصائية ومعرفتها يجب تحوير التقريب باستخدام المربعات الصغرى كما يلي:

$$s = \sum \frac{\left(y_i - y_i^{th}\right)^2}{\sigma_i^{\,2}} \qquad ...... (16.6)$$

حيث ترمز y_i للقيمة التجريبية و y_i^{th} للقيمة النظرية (أي بدلالة المنحنى المستخدم للملائمة). فمثلا لو كنا نتعامل بالانكفاء الخطي فإن :

$$y_i^{th} = a + bx_i$$

وتصبح المعادلة (16.6) على النحو:

$$s = \sum \left(\frac{y_i - a - bx_i}{\sigma_i} \right)^2$$

كما تكون المعادلات العمودية:

$$a\sum \frac{1}{\sigma_i^2} + b\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} = \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2}$$

$$a\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} + b\sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} = \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}$$

ومنها نرى أن:

$$a=\frac{1}{\Delta}\left(\sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\sum\frac{y_i}{\sigma_i^2}-\sum\frac{x_i}{\sigma_i^2}\sum\frac{x_iy_i}{\sigma_i^2}\right)$$

$$b=\frac{1}{\Delta}\left(\sum\frac{1}{\sigma_i^2}\sum\frac{x_iy_i}{\sigma_i^2}-\sum\frac{x_i}{\sigma_i^2}\sum\frac{y_i}{\sigma_i^2}\right)$$

وحيث:

$$\Delta=\sum\frac{1}{\sigma_i^2}\sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}-\left(\sum\frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2$$

وبذلك نحصل على المنحنى المقرب $y=a+bx$.

من التطبيقات في هذا المجال استخدام دوال مهمة، كثيرا ما تعترضنا بمجال الفيزياء النووية، وهي حدوديات لجاندر $P_\ell(x)$.

[بعض منها $P_o(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$ حيث $x=\cos\theta$]

في هذه الحالة نستخدم:

$$y=\sum_{\ell=0}^{n}a_\ell P_\ell(x) \qquad ......\ (17.6)$$

والحالة التي عادة ما نستخدم بها طريقة المربعات الصغرى وحدوديات لجاندر هي التوزيعة الزاوية لأشعة (γ) الصادرة عن نواة محفزة أو مثارة؛ حيث تصبح المعادلة (17.6) بسيطة ولا تحتوي على غير ثلاثة حدود؛ أي أن:

$$y=a_oP_o+a_2P_2+a_4P_4 \qquad ......\ (18.6)$$

وذلك لاعتبارات قواعد الاختيار بالتفاعلات النووية.

وقياس التوزيعة الزاوية لأشعة (γ) من خلال بعض التفاعلات النووية يساعد كثيرا في تصنيف مستويات الطاقة في النواة ؛ ولهذا نرى أهمية ملائمة البيانات التجريبية للمنحنى (18.6) وحساب المعاملات الثلاثة.

في المعتاد، وبدلا من المعادلة (18.6)، يتم العمل بالمعادلة:

$$y = A_o\left(1 + A_2P_2 + A_4P_4\right) \qquad \text{...... (19.6)}$$

حيث A_2 و A_4 تسمى بالمعاملات المقومة (normalized coefficients) و $A_2 = {}^{a_2}\!/_{a_o}$ و $A_4 = {}^{a_4}\!/_{a_o}$.

الآن نباشر عملية استخراج المعادلات العمودية ونحسب الجمع:

$$s = \sum\left(\frac{y_i - a_0 - a_2P_2(x_i) - a_4P_4(x_i)}{\sigma_i}\right)^2 \qquad \text{...... (20.6)}$$

نفاضل (20.6) بالنسبة لـ a_o , a_2 و a_4 ثم نضع ناتج التفاضل مساوياً للصفر لنحصل على:

$$a_o\sum\frac{1}{\sigma_i^2} + a_2\sum\frac{P_2(x_i)}{\sigma_i^2} + a_4\sum\frac{P_4(x_i)}{\sigma_i^2} = \sum\frac{y_i}{\sigma_i^2}$$

$$a_o\sum\frac{P_2(x_i)}{\sigma_i^2} + a_2\sum\frac{P_2^2(x_i)}{\sigma_i^2} + a_4\sum\frac{P_2(x_i)P_4(x_i)}{\sigma_i^2} = \sum\frac{y_iP_2(x_i)}{\sigma_i^2}$$

$$a_o\sum\frac{P_4(x_i)}{\sigma_i^2} + a_2\sum\frac{P_2(x_i)P_4(x_i)}{\sigma_i^2} + a_4\sum\frac{P_4^2(x_i)}{\sigma_i^2} = \sum\frac{y_iP_4(x_i)}{\sigma_i^2}$$

الآن بإيجاد حلول هذه المعادلات نصل إلى قيم a_o و a_2 و a_4 وبالتالي لقيم A_o و A_2 و A_4.

نلاحظ أنه نظرا لوجود الأخطاء التجريبية بقيم y_i فإنه لا بد من تواجد أخطاء أيضا بالمعاملات A وهذه تحسب من العلاقة:

$$\Delta A \equiv \sigma_A = \sqrt{\sum \sigma_i^2 \left(\partial A / \partial y_i \right)^2}$$

مثال (11.6)

إذا كانت التوزيعة الزاوية لأشعة γ الناتجة عن التفاعل $^{140}Ce\left(n,n'\gamma\right)$، استخدم فيه شعاع من النيوترونات السريعة من مفاعل تاجوراء، والتي تقابل طاقة $E_\gamma = 578.08\,keV \left(4^+ \rightarrow 2^+\right)$ هي كما بالجدول المصاحب أسفله . فاكتب برنامجا يحسب المعاملات المختلفة .

θ	90^o	105^o	115^o	125^o	135^o	150^o
$y(\theta)$	1.000	1.007	1.073	1.178	1.266	1.372
	± 0.011	± 0.011	± 0.012	± 0.013	± 0.014	± 0.015

الحل:

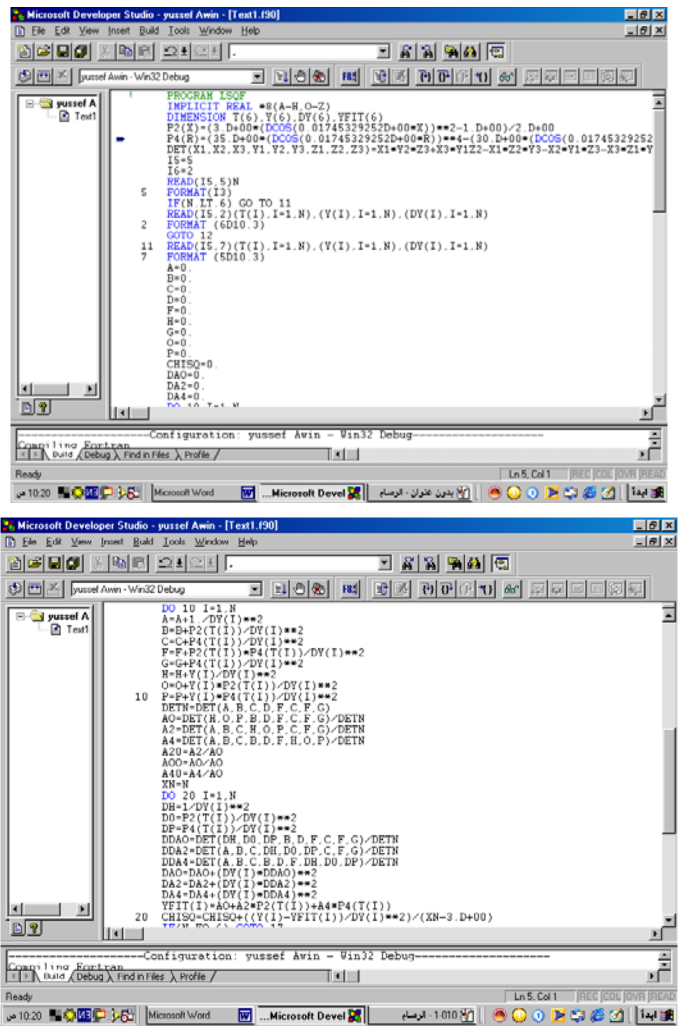
نكتب البرنامج الموضح بالشكل (18.6) وباستخدام البيانات المعطاة نحسب المعاملات المختلفة لنجد أن:

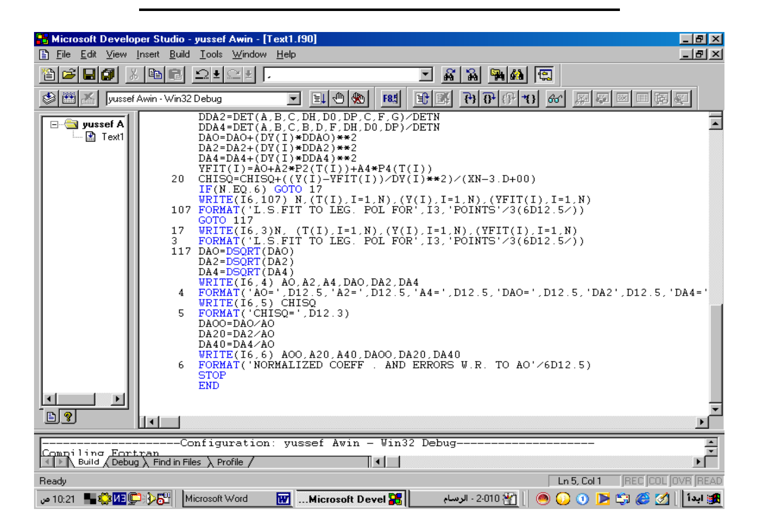
$$A_o \pm \Delta A_o = 1.163 \pm 0.006$$
$$A_2 \pm \Delta A_2 = 0.297 \pm 0.015$$
$$A_4 \pm \Delta A_4 = -0.015 \pm 0.019$$
$$s\left(\equiv X^2\right) = 2.19$$

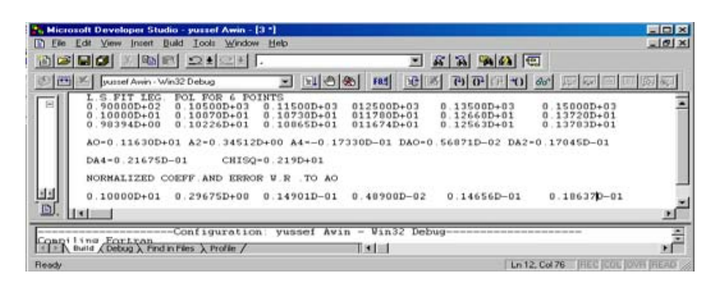
كما أن قيم y_i^{th} هي (على التوالي):

$$0.984\,,1.023\,,1.086\,,1.256\,,1.378$$

نلاحظ أننا قسمنا s على $n-3$ وذلك لاعتبارات درجات الحرية. نلاحظ أيضا أننا حصلنا عل قيم نظرية تقريبية جيدة وذلك مقارنة بالقيم التجريبية.







الشكل (19.6)- المثال (11.6) بالنتائج بلغة فورتران 90

تمارين (6)

1. ماذا نعي بالعبارات التالية : الانكفاء الخطي، الملائم الأجود، المربعات الصغرى؟
2. كيف يمكننا إيجاد أو استنتاج المنحنى التقريبي لأي فئة من البيانات ؟
3. إذا كانت القيم التالية معطاة:

- $x_o \quad x_1 \quad x_2$
- $f(x_o) \quad f(x_1) \quad f(x_2)$

فأوجد معاملات الحدودية $p_2(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2$ التي تمثل البيانات وبدلالتها.

4. باستعمال الجدول المرافق، أوجد التقريب باستخدام المربعات الصغرى للصيغة $v = \sqrt{t} + b$.
قارن بين البيانات الجدولية وقيم الدالة الناتجة.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v	8	20	27	32	40	40	45	50	50	56

5. أوضح أن طريقة المربعات الصغرى عندما تطبق على العلاقة $y = a$ تعطى صيغة للمتوسط الحسابي لقيم y.
6. بافتراض أن الحرارة النوعية للماء هي دالة خطية في درجة الحرارة؛ استخدم الجدول السابق بالمثال (3.6) لحساب هذا التقريب وباستخدام طريقة المربعات الصغرى. قارن بين النتيجتين.

7. لائم البيانات التالية بدالة قطع زائد ودالة أسية وقارن.

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4
y	30	10	9	6	5	2	4

8. قم باشتقاق المعادلات العمودية الثلاث للمنحنى: $y = a + b\cos x + c\sin x$

أوجد a , b و c التي تلائم البيانات:

x	0	0.4	0.8	1.2	1.60	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
y	3	2.1	1.3	0.5	0	0.2	0.0	0.3	1.1	2.0	2.9

9. قم بحل المثال (7.6) من جديد ولكن باستخدام البيانات التالية*:

$E_\gamma = 919.48\ keV$

$y(\theta)$: 1.000   1.074   1.221   1.369   1.410   1.533

$E_\gamma = 1011.47\ keV$

$y(\theta)$: 1.000   0.953   0.896   0.917   0.838   0.775

10. عند تصادم نواة ^{13}C ببروتونات طاقتها $4.5MeV$ بعض من هذه البروتونات تؤسر بواسطة النواة وهذا يسبب في تحللها عن طريق أشعة γ معطية هذه الأشعة بطاقة $11MeV$؛ فإذا كانت التوزيعة الزاوية معطاة بالجدول أسفله. فاستخدم طريقة المربعات الصغرى لحساب المعاملات

* استخدم نفس الأخطاء التجريبية للمثال (7.6).

المختلفة $A_o\,,A_2\,,A_4$ واكتب أيضا القيم التقريبية المحسوبة.

θ	0	45	60	90	105	135
عدد γ	1352	927	804	889	855	881

11. بمسائل التوزيعة الزاوية إذا كانت $y(\theta)=a_o+a_2 p_2(\theta)$ قم بالتفصيل بكتابة الخطوات التي توجد بها a_o و a_2 وذلك باستخدام جدول بيانات وطريقة المربعات الصغرى.

12. للانكفاء الخطي، ماذا عن الحالة التي تكون فيها الأخطاء التجريبية متساوية؟ اشرح.

13. قم باشتقاق صيغة للانكفاء الخطي للبيانات الممثلة بـ $y=b^x$.

14. إذا كان المنحنى الممثل للبيانات المعطاة هو عبارة عن قطع مكافئ فهل يمكن القيام بتحويله تمكننا من الاستفادة من الانكفاء الخطي. اشتق المعادلات العمودية.

15. إذا كان المنحنى الملائم يمثل بالمعادلة $y=\sqrt{a+bx}$.

    أ- أوضح أن هذا التقريب يمكن جعله خطياً.

    ب- أكتب المعادلات العمودية لهذا التقريب.

16. اكتب المعادلات العمودية للانكفاء المتعدد: $f(y,z)=ay+bz+c$.

17. إذا عرفنا: $\Omega=\sum\frac{1}{(n-m)}(y_i-\bar{y}_i)^2$

حيث y_i هي القيمة التجريبية و $\bar{y}_i$ هي القيمة المحسوبة و n عدد النقاط و m عدد البارامترات بالمنحنى التقريبي؛ فإن مبدأ جاوس لجودة الملائمة يقول بأن أجود ملائمة، أو تقريب، هي تلك التي تجعل من Ω قيمة صغرى للبيانات المعطاة. وإذا أعطيت البيانات التالية:

x	0	1	2	3	4
y	0	20	40	50	70

فاستخدم مبدأ جاوس لإثبات ما إذا كانت العلاقة الخطية أو التربيعية أجود.

18. الجدول أسفله يعطي بيانات عن مدى استهلاك الماء بإحدى البلدان وذلك ببلايين الجالونات في اليوم.

أ-استعمل الانكفاء الأسي لملائمة استهلاك الماء بدلالة الزمن.

ب- استعمل (أ) لحساب استهلاك الماء في السنة 1975 وقارن بما كان متوقعاً وهو 449.7.

السنة	1930	1940	1950	1960	1970
الاستهلاك	110.5	136.43	202.7	322.9	411.2

الفصل السابع

مسائل القيم الذاتية

يحتوي هذا الفصل على:

- 1.7 القيم الذاتية لمصفوفة حقيقية متناسقة.
- 2.7 طريقة جاكوبي Jacobi Method .
- 3.7 المتجهات الذاتية.
- 4.7 مسائل قيم ذاتية عامة.

1.7 القيم الذاتية لمصفوفة حقيقية متناسقة

(Eigenvalues of a real symmetric matrix).

في كثير من المسائل الفيزيائية نجد أنفسنا مضطرين لحل المعادلات التالية:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{0}$$

أو

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

أو بشكل آخر:

$$A\underset{\sim}{x} = \lambda I \underset{\sim}{x} \qquad ......\ (1.7)$$

حيث:

A مصفوفة متناسقة.

$\underset{\sim}{x}$ متجه لمتغيرات مستقلة.

λ قيم ذاتية تمثل قيم فيزيائية مثل الترددات الطبيعية لأنظمة متذبذبة كالوتر المهتز.
ومسألة القيم الذاتية تتلخص في إيجاد قيم λ وهي القيم الذاتية و $\underset{\sim}{x}$ والتي تسمى بالمتجهات الذاتية. والطريقة الشائعة والمعتادة لإيجاد حلول هذه المسائل هي طريقة جاكوبي.

2.7 طريقة جاكوبي (Jacobi's Method)

تتلخص طريقة جاكوبي في الوصول بالمعادلة (1.7) إلى الشكل

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}$$

أو أن:

$$B\,\underset{\sim}{\bar{x}} = \underset{\sim}{\lambda}\,\underset{\sim}{\bar{x}} \qquad \text{...... (2.7)}$$

حيث B و $\underset{\sim}{\lambda}$ مصفوفتان قطريتان . لو تمكنا من ذلك عندئذ نرى أن الحلول هي $\underset{\sim}{\lambda}$ و $\underset{\sim}{\bar{x}}$ ؛ وحيث تكون $\underset{\sim}{\lambda}$ هنا هي B .

ولكي نستخدم طريقة جاكوبي دعنا نستذكر بعضاً من معلوماتنا حول تحويل الإحداثيات في المستوى . ففي المستوى وللتحويل. من الإحداثيات $\underset{\sim}{x}$ إلى $\underset{\sim}{\bar{x}}$ بدوران θ للمحاور نقوم بالعملية:

$$\underset{\sim}{x} = T\,\underset{\sim}{\bar{x}} \qquad \text{...... (3.7)}$$

حيث:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \underset{\sim}{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة الدوران. ولكن:

$$A\,\underset{\sim}{x} = \lambda\,\underset{\sim}{x} \qquad \text{...... (4.7)}$$

نعوض بالمعادلة (3.7) في المعادلة (4.7) لنحصل على:

$$AT\underset{\sim}{x} = \lambda T\underset{\sim}{x} \qquad ......(5.7)$$

بضرب (5.7) في T^T من اليسار واستعمال الخاصية أن $T^T T = 1$ نرى أن:

$$T^T AT\underset{\sim}{x} = \lambda T^T T\underset{\sim}{x} = \lambda\underset{\sim}{x} \qquad ......(6.7)$$

الآن لكي نطبق طريقة جاكوبي ونصل إلى الهدف المطلوب وهو جعل المصفوفة على يسار المعادلة (6.7) قطرية ، نختار θ بحيث تكون $B = T^T AT$ قطرية؛ . ولكن:

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ولكي تكون B قطرية يجب أن يكون الحد غير القطري مساوياً للصفر وهذا يعني أن:

$$a_{12}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + \cos\theta\sin\theta\left(a_{22} - a_{11}\right) = 0 \qquad ......(7.7)$$

و.هذه تعطي العلاقة:

$$\tan 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \qquad ......(8.7)$$

بينما تصبح B على الشكل:

$$B = \begin{pmatrix} a_{12}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta & 0 \\ 0 & a_{11}\sin^2\theta - 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\cos^2\theta \end{pmatrix} \qquad ......(9.7)$$

مثال (1.7)

استخدم طريقة جاكوبي لجعل المصفوفة $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ قطرية . وعين القيم الذاتية للمصفوفة .

الحل:

بالرجوع للمعادلة (8.7) نرى أن θ التي تجعل A قطرية هي تلك التي تحقق المعادلة:

$$\tan 2\theta = \frac{2(1)}{4-2} = 1$$

أي أن $\theta = \pi/8$ ومنها ومن المعادلة (9.7) نحصل على:

$$B = \underset{\sim}{\lambda} = \begin{pmatrix}4.414 & 0\\ 0 & 1.586\end{pmatrix}$$

آي أن القيم الذاتية للمصفوفة هي $\lambda_1 = 4.414$ و $\lambda_2 = 1.586$.

هذه هي طريقة جاكوبي في أبسط صورها حيث تم استخدامها في المستوى.

الآن لو أردنا العمل بمصفوفات من النوع (3×3) وهي المصفوفات التي عادة ما تواجهنا بالحياة العملية؛ فإننا نقوم بتحويلات متتابعة في المستوى لنتخلص من العناصر غير القطرية كلها . فمثلا تكون هذه التحويلات النوع:

$$T_1 = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

وهو يمثل دوراناً في المستوى $x-y$. و

$$T_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ويمثل دوراناً في المستوى $x-z$. و

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ويمثل دوراناً في المستوى $y-z$.

ولتوضيح الخطوات المتبعة لجعل المصفوفة قطرية دعنا نقوم بحل المثال التالي:

مثال (2.7)

باستخدام طريقة جاكوبي أوجد القيم الذاتية للمصفوفة المتناسقة.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل:

1. لنأخذ أكبر عنصر غير قطري وهو هنا a_{12} أو a_{23} وكلاهما يساوي -1 عليه نأخذ a_{12} على أنه اكبر عنصر. (في القيمة)
2. نستخدم $T_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ومنها نرى أن:

$$\tan 2\theta = \frac{-2}{2-2} = -\frac{2}{0} \rightarrow -\infty$$

أي أن: $\theta = -\pi/4$

وهكذا حصلنا على زاوية الدوران التي تجعل من العنصرين a_{12} و a_{21} يتلاشيان.

بينما تكون مصفوفة الدوران:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2/2} & +\sqrt{2/2} & 0 \\ -\sqrt{2/2} & \sqrt{2/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. نعين المصفوفة:

$$A_1 = T_1^T A T_1$$

وتصبح A الجديدة هي A_1.

4. نعيد الخطوات 1-3 على المصفوفة A_1 ونتخلص من أكبر عنصر غير قطري؛ وهكذا حتى نحصل على A_m (m هو عدد مرات الدوران) تكون قطرية . وهكذا نحصل على القيم الذاتية.

لو قمنا بكل الخطوات سابقة الذكر فإنه بعد خمس دورانات يمكننا الحصول عل القيم الذاتية التالية:

$$\lambda_1 = 3.4142$$
$$\lambda_2 = 1.9998$$
$$\lambda_3 = 0.5859$$

ملاحظات

1) بالمثال السابق لاحظ أن $a_{31} = a_{13} = 0$ وأنها متناسقة وعليه يجب التخلص من عنصرين فقط وهما a_{12} و a_{23}.

2) يعتقد أحدنا، من الملاحظة (1)، أنه يلزمنا دورانان لإنهاء العملية ولكن في الحقيقة وكما لاحظنا ليس هذا صحيحاً، فلقد احتجنا إلى خمس دورانات هنا . ويرجع السبب في ذلك إلى أنه بعد ضرب المصفوفات تتكون لدينا أرقام جديدة بمواضع أخرى بالرغم من اختفاء أحد العناصر غير القطرية.

ولكن لحسن الحظ أن كل دوران يجعل أكبر قيمة للعناصر غير القطرية تتضاءل وهكذا تدريجياً يتقارب A إلى الصيغة القطرية.

نعود الآن إلى الصيغة:

$$\tan 2\theta = \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} \qquad ...... (10.7)$$

حيث a_{ij} هو أكبر عنصر غير قطري موجود بالصف i والعمود j ؛ وحيث أن:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \qquad ...... (11.7)$$

فإنه من المعادلتين (10.7) و (7. 11) نرى أن:

$$2a_{ij}\tan^2\theta + 2(a_{ii} - a_{jj})\tan\theta - 2a_{ij} = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في $\tan\theta$ وحلولها:

$$\tan\theta = \frac{-\left(a_{ii} - a_{jj}\right) \pm \sqrt{\left(a_{ii} - a_{jj}\right)^2 + 4a_{ij}^2}}{2a_{ij}}$$

بالضرب في المرافق نحصل على:

$$\tan\theta = \frac{\pm 2a_{ij}}{\left|a_{ii} - a_{jj}\right| + \sqrt{\left(a_{ii} - a_{jj}\right)^2 + 4a_{ij}^2}} \qquad \text{...... (12.7)}$$

و تعتمد الإشارة ($\pm$) على ما إذا كان a_{ii} أكبر من أو أصغر من a_{jj}. لاحظ أيضاً أن $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.

الآن بحساب $\tan\theta$ من (12.7) نستطيع حساب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ من العلاقتين:

$$\cos\theta = \left(1 + \tan^2\theta\right)^{-1/2} \qquad \text{...... (13.7)}$$

$$\sin\theta = \cos\theta \cdot \tan\theta \qquad \text{...... (14.7)}$$

والمعادلات (12.7) ، (13.7) و (14.7) هي المستعملة عادة في الحسابات. خصوصا عند الاستنجاد بالحواسيب بدلا من المعادلة (10.7).

3.7 المتجهات الذاتية (Eigenvectors).

بالنسبة لحساب المتجهات الذاتية $\underset{\sim}{x}$؛ نلاحظ أنه توجد n من القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ وذلك طبقاً لبعد المصفوفة $(n \times n)$. و إذا كان V هو مجموعة هذه المتجهات $\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2} ...., x_n$ في مصفوفة مربعة والمناظرة لمصفوفات التحويل $T_1, T_2, ...$ و T_m وبحيث تقابل $\underset{\sim}{x_1}$ القيمة الذاتية λ_1 و $\underset{\sim}{x_2}$ القيمة الذاتية λ_2، و..... . وهكذا.

فإن:

$$AV = \underset{\sim}{\lambda} V$$

وهذا يعنى أن:

$$V^{-1}AV = \underset{\sim}{\lambda} \qquad \text{...... (15.7)}$$

وبمقارنة المعادلة (15.7) بالمعادلة (لاحظ أن $T_1^{-1} = T_1^T$ و $V^{-1} = V^T$):

$$B = T_m^{-1} \quad T_{m-1}^{-1} .....T_1^{-1} \quad AT_1......T_m \qquad \text{...... (16.7)}$$

نرى أن:

$$V = T_1 \, T_2 ......T_m \qquad \text{...... (17.7)}$$

فعلى سبيل المثال لو رجعنا للمثال (1.7)فإن :

$$V = T_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

أو أن:

$$V = T_1 = \begin{pmatrix} 0.924 & -0.383 \\ 0.383 & 0.924 \end{pmatrix}$$

و أن:

$$\underset{\sim}{x_1} = \begin{pmatrix} 0.924 \\ 0.383 \end{pmatrix} \text{ و } \quad \underset{\sim}{x_2} = \begin{pmatrix} -0.383 \\ 0.924 \end{pmatrix}$$

بينما نجد بالنسبة للمثال (2.7) أن:

$$V = T_1 .....T_5 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.707 & 0.5 \\ -0.707 & 0 & 0.707 \\ 0.5 & -0.707 & 0.5 \end{pmatrix}$$

وهكذا يكون:

العمود الأول هو أول متجه ذاتي يماثل القيمة الذاتية 3.4142

العمود الثاني هو ثاني متجه ذاتي يماثل القيمة الذاتية 1.9998

العمود الثالث هو ثالث متجه ذاتي يماثل القيمة الذاتية 0.5859

مثال (3.7)

أستخدم طريقة جاكوبي لحساب القيم والمتجهات الذاتية للمصفوفة أسفله مستخدماً الحاسوب.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل:

حيث إن المصفوفة متناسقة ء كما سبق ذكره ، ولاستخدام طريقة جاكوبي نكتب البرنامج الفرعي JACOBI وبحيث نضع شرطا على الحدود غير القطرية لتتضاءل إلى الصفر بأن نطلب أن تكون قيمتها أقل من عدد صغير مثل $\varepsilon = 10^{-8}$ والبرنامج الفرعي هو:

SUBROUTINE JACOBI (N,Q,JVEC,M,V)

حيث N هو رتبة المصفوفة المتناسقة Q وهي أكبر من أو تساوي 2.
و V هي مصفوفة المتجهات الذاتية الناتجة.

و M هو عدد الدورانات المعمولة للحصول على المصفوفة القطرية، بينما $JVEC$ هو بارامتر يأخذ القيمة صفرا إذا أردنا طباعة القيم الذاتية بينما يأخذ القيم $\pm 1, \pm 2, \ldots\ldots\ldots\ldots$ إذا أردنا الحصول على القيم الذاتية والمتجهات الذاتية معاً.

في هذا المثال إذا كتبنا البرنامج الموضح بالشكل (1.7) والذي يشتمل على البرنامج الفرعي **JACOBI** فإنه يمكننا الحصول على النتائج الموضحة بالجدول (1.7) والذي من خلاله نرى أن القيم الذاتية الثلاث هي:

$$\lambda_1 = 3.41423$$
$$\lambda_2 = 2.000$$
$$\lambda_3 = 0.58579$$

وهي تقريباً نفس النتائج التي سبق وأن حصلنا عليها يدويا بالمثال السابق (2.7)، غير أنه لزم الأمر هنا تسعة دورانات للحصول على هذه القيم نظراً للدقة التي تم فرضها بالبرنامج.

```
C
C     THIS IS MAIN PROGRAM FOR EIGEN
C     VALUE PROBLEM IN THE FORM AX =LX
C
      DATA IREAD , IWRITE /5,2 /
      DIMENSION Q (12,12) , V(12,12)
C
C     READ IN THE ORDER OF MATRIX Q
C
      READ (IREAD,*) N
      DO 11 I= 1,N
   11 READ (*,*)(Q(I,J),J=1,N)
      WRITE(IWRITE,30)
   30 FORMAT('JVEC','MATRIX A'/)
```

```
      DO 32 I=1,N
      DO 31 J=1,N
   31 Q(J,I)=Q(I,J)
   32 WRITE (IWRITE,40)(Q(I,J),J=1,N)
   40 FORMAT(5F15.5)

      CALL JACOBI(N,Q,JVEC,M,V)

C     M NUMBER OF ROTATION

      WRITE(IWRITE,80)M
   80 FORMAT(//,  'THE NUMBER OF ROTATION=',I3//)
C
C     WRITE OUT THE ELGEN VALUES AND THE CORRESPONDING
C     ELGEN VECTORS
C
      DO 46 J=1,N
      WRITE(IWRITE,50)J,Q(J,J)
   50 FORMAT(/'EIGENVALUE(',I2,')=',F15.5)
      WRITE(IWRITE,60)
   60 FORMAT(/'EIGENVECTRS'/)
      DO 46 I=1,N
   46 WRITE(IWRITE,7)V(I,J)
    7 FORMAT(2X,F15.5)
      STOP
      END

C      SUPROGRAM FOR DIAGONALIION OF MATRIX Q
C      BY SUCCESSIVE ROTATIONS
C
      SUBROUTINE JACOBI(N,Q,JVEC,M,V)
      DIMENSION Q(12,12),V(12,12),X(12),IH(12)
      JVEC=+1
C
C  NEXT8 STATMENTS FOR SITING INITIAL VALUSOF MATRIX V
C
      IF(JVEC.EQ.0)GOTO 15
      DO 14 I=1,N
      DO 14 J=1,N
   14 V(I,J)=(I/J)*(J/I)
   15 M=0
C
C      NEXT 8STATMENTS SCAN FOR LARGEST OFF DIAG.
C      ELEMT. IN EACH ROW
C      X(I) CONTAINS LARGEST ELEMENT IN THE ROW
C      IH(I) HOLDS SECOND SUBSCRIPT DEFINING POSTION
C      OF ELEMENT
C
      MI=N-1

   DO 30 I=1,MI
   X(I)=0
   MJ=I+1
   DO 30 J=MJ,N
   IF(X(I).GT.ABS(Q(I,J)))GOTO 30
   X(I)=ABS(Q(I,J))
   IH(I)=J
30 CONTINUE

     NEXT 7 STATEMENT FIND FOR MAXIMUMOF X(I)
     FOR PIVOT ELEMENT
```

```
  40 DO 70 I=1,MI
     IF(I.LE.1)GOTO 60
     IF(XMAX.GT.X(I))GOTO 70
  60 XMAX=X(I)
     IP=I
     JP=IH(I)
  70 CONTINUE
C
C     NEXT TWO STATMENT TEST FOR XMAX , IF LESS
C     THAN 10**8, GO TO 1000
C
     EPSI=1.E-8
     IF (XMAX.LE.EPSI)GOTO 1000
     M=M+1
C
C   NEXT11STATMENT FOR COMPUTING,SIN,COS,Q(I,J),Q(J,J)
C
     IF(Q(IP,IP).GT.Q(JP,JP)) GOTO 151
     TANG=-2.*Q(IP,JP)/(ABS(Q(IP,IP)-Q(JP,JP))+SQRT((
    1Q(IP,IP)-Q(JP,JP))**2+4.*Q(IP,JP)**2))
     GOTO 160
 151 TANG=+2.*Q(IP,JP)/(ABS(Q(IP,IP)-Q(JP,JP))+SQRT((
    1Q(IP,IP)-Q(JP,JP))**2+4.*Q(IP,JP)**2))
 160 COSN=1./SQRT(1.+TANG**2)
     SINE1= COSN*TANG
     QII=Q(IP,IP)
     Q(IP,IP)=COSN**2*(QII+TANG*(2.*Q(IP,JP)+TANG*Q(JP,JP)))
     Q(JP,JP)=COSN**2*(Q(JP,JP)-TANG*(2.*Q(IP,JP)-TANG*QII))
     Q(IP,JP)=0
C
C     NEXT 4 STATMENT FOR PSEUDO RANK ELGENVALUES
C
     IF(Q(IP,IP).GE.Q(JP,JP))GOTO 153
     TEMP=Q(IP,IP)
     Q(IP,IP)=Q(JP,JP)
     Q(JP,JP)=TEMP
C
C     NEXT 6 STATMENT ADJUST SIN,COS,FORCOMPUTATION
C      OF Q(I,K),V(I)
C
     IF (SINE1.GE.0.)GOTO 155
     TEMP=+COSN
     GOTO 170
 155 TEMP=-COSN
 170 COSN=ABS(SINE1)
     SINE1=TEMP
 153 DO 350 I=1,MI
     If(((I.EQ.IP).OR.(I.EQ.JP)).OR.((IH(I).NE.IP).
    1AND.(IH(I).NE.JP)))GOTO 350
     K=IH(I)
     TEMP=Q(I,K)

      Q(I,K)=0
      MJ=I+1
      X(I)=0.
C
C     NEXT 5 STATMENT SEARCH IN DEPLETED ROW FOR
C     ROW MAXIMUM
C
      DO 320 J=MJ,N
      IF(X(I).GT.ABS(Q(I,J)))GOTO 320
      X(I)=ABS(Q(I,J))
```

```
      IH(I)=J
  320 CONTINUE
      Q(I,K)=TEMP
  350 CONTINUE
      X(IP)=0.
      X(JP)=0.
C
C      NEXT 30 STATMENT FOR CHANGING THE OTHER
C      ELEMENT OF Q
C
      DO 530 I=1,N
      IF(I.EQ.IP)GOTO 530
      IF(I.GT.IP) GOTO 420
      TEMP=Q(I,IP)
      Q(I,IP)=COSN*TEMP+SINE1*Q(I,JP)
      IF(X(I).GE.ABS(Q(I,IP))) GOTO 390
      X(I)=ABS(Q(I,IP))
      IH(I)=IP
  390 Q(I,JP)=-SINE1*TEMP+COSN* Q(I,JP)
      IF(X(I).GE.ABS(Q(I,JP))) GOTO 530
      X(I)=ABS(Q(I,JP))
      IH(I)=JP
      GOTO 530
  420 IF(I-JP)430,530,480
  430 TEMP=Q(IP,I)
      Q(IP,I)=COSN*TEMP+SINE1*Q(I,JP)
      IF(X(IP).GE.ABS(Q(IP,I)))GOTO 450
      X(IP)=ABS(Q(IP,I))
      IH(IP)=I
  450 Q(I,JP)=-SINE1*TEMP+COSN*Q(I,JP)
      IF(X(IP).GE.ABS(Q(I,JP)))GOTO 530
  480 TEMP=Q(IP,I)
      Q(IP,I)=COSN*TEMP+SINE1*Q(JP,I)
      IF(X(IP).GE.ABS(Q(IP,I)))GOTO 500
      X(IP)=ABS(Q(IP,I))
      IH(IP)=I
  500 Q(JP,I)=-SINE1*TEMP+COSN*Q(JP,I)
      IF(X(JP).GE.ABS(Q(JP,I))) GOTO 530
      X(JP)=ABS(Q(JP,I))
      IH(JP)=I
  530 CONTINUE
C
C   NEXT6 STATMENT TEST FOR COMPUTATION OF EIGENECTORS
C
      IF(JVEC.EQ.0) GOTO 40
      DO 550 I=1,N
      TEMP=V(I,IP)
      V(I,JP)=COSN*TEMP+SINE1*V(I,JP)
  550 V(I,IP)=SINE1*TEMP+COSN*V(I,JP)
      GOTO 40
 1000 RETURN
      END
```

الشكل (1.7) برنامج يحسب القيم والمتجهات الذاتي للمصفوفة $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **باستخدام طريقة جاكوبي.**

```
JVECMATRIX A

        2.00000      -1.00000       0.00000
       -1.00000       2.00000      -1.00000
        0.00000      -1.00000       2.00000

THE NUMBER OF ROTATION =  9


EIGENVALUE(1)=  3.41421

EIGENVECTRS
                 0.50000
                -0.70711
                 0.50000

EIGENVALUE(2)=  2.00000

EIGENVECTRS
                 0.70711
                -0.00000
                -0.70711

EIGENVALUE(3)=  0.58579

EIGENVECTRS
                 0.50000
                -0.70711
                 0.50000
```

الجدول (1.7) نتائج البرنامج الموضح بالشكل (1.7)

نعطي كذلك نفس المسألة ولكن بلغة C و باستخدام بيئة التطوير البرمجية دلفي. وذلك بالأشكال (4.7) – (7.7).

```
#include<conio.h>
#include<iostream.h>
#include<math.h>

angle_fun();
trans_funz();
trans_funy();
trans_funx();
int j,h,i,l,k,p,q,R,g;
float A[10][10],B[10][10],b[10][10],v[10][10],v[10][10];
float angle,C=0.0,vz[10][10],Vy[10][10],Vx[10][10];

main()
{
   clrscr();
   cout<<"\nEnter number of Rotations R =";
    cin>>R;
```

```
for( j=0 ; j <3 ; j++)
{ for( i=0 ; i< 3 ; i++)
  { cout<<"\nEnter A["<<j<<"]["<<i<<"]= ";
  cin>>A[j][i];
  } }
 cout<<"\nThe Array A[j][i]\n\n";
 for( j=0 ; j < 3 ; j++)
  { cout<<endl;
 for( i=0 ; i< 3 ; i++)
   { cout<<A[j][i]<<"\t\t";
  } }
  for (h=1 ; h<= R ; h++)
  {
  angle_fun();

   if (l+k == 1 )
   trans_funz();
   else
   {
   if( l+k == 2 )
   trans_funy();
   else
   trans_funx();
   }
 for( j=0 ; j < 3 ; j++)
  {
 for( i=0 ; i< 3 ; i++)
A[j][i]=b[j][i];
} }

 for( j=0 ; j < 3 ; j++)
  { cout<<"\nIenvalue["<<j<<"]="<<b[j][j]<<endl;
  cout<<"Igemvectrs:\n";
  for( i=0 ; i< 3 ; i++)

  {  cout<< V[i][j]<<endl;}}

       getche();
 return(0);
}
/*********************************************/
angle_fun()
{
float m=0,w,s;
 for( j=0 ; j < 3 ; j++)
    {   for( i=0 ; i< 3 ; i++)
     {   if ( i!=j)
     {   if( A[j][i] < 0)
     w = A[j][i] *(-1);
     else  w = A[j][i];
      if ( m < w )
      {   m = w; l=j; k=i;

    }}}}

      s = 2 * A[l][k]; w = A[l][l] - A[k][k];
      if( w == 0  && s < 0 )
          angle = - 3.14159265/4;
          else { if ( w == 0 && s > 0 )
          { angle = 3.14159265/4;
           } else
           { angle = (atan(s/w))/2;}}
 return(0);
}
/*****************************************************/
trans_funz()
{
float Tz[3][3]={cos(angle),-sin(angle),0,sin(angle),cos(angle),0,0,0,1};
float Tt[3][3]={cos(angle),sin(angle),0,-sin(angle),cos(angle),0,0,0,1};

    for( j=0 ; j < 3 ; j++)
     {p=0;
     for (g=0; g< 3;g++)
```

```
{q=0;
for( i=0 ; i< 3 ; i++)
{C= C+Tt[j][i]*A[q][p];
q=q+1;
}
B[j][g]=C ; C=0.0 ; p=p+1 ;
}}
for( j=0 ; j < 3 ; j++)
{p=0;
for (g=0; g< 3;g++)
{q=0;
for( i=0 ; i< 3 ; i++)
{C= C+B[j][i]*Tz[q][p];
q=q+1;
}
b[j][g]=C ; C=0.0 ; p=p+1 ;
}}
for( j=0 ; j < 3 ; j++)
{ for( i=0 ; i< 3 ; i++)
{ if ( h == 1)
V[j][i]=Tz[j][i];
else
Vz[j][i]=Tz[j][i]; }}

if(h != 1 )
{
for( j=0 ; j < 3 ; j++)
{p=0;
for (g=0; g< 3;g++)
{q=0;
for( i=0 ; i< 3 ; i++)
{C= C+V[j][i]*Vz[q][p];
q=q+1;
}
v[j][g]=C ; C=0.0 ; p=p+1 ;
}}
for (j=0;j<=3;j++)
{ for(i=0;i<=3;i++)
V[j][i]=v[j][i];}}
return(0);
}
/*****************************************************/
trans_funy()
{
float Ty[3][3]={cos(angle),0,-sin(angle),0,1,0,sin(angle),0,cos(angle)};
float Tt[3][3]={cos(angle),0,sin(angle),0,1,0,-sin(angle),0,cos(angle)};
for( j=0 ; j < 3 ; j++)
{p=0;
for (g=0; g< 3;g++)
{q=0;
for( i=0 ; i< 3 ; i++)
{C= C+Tt[j][i]*A[q][p];
q=q+1;
}
B[j][g]=C ; C=0.0 ; p=p+1 ;
}}
for( j=0 ; j < 3 ; j++)
{p=0;
for (g=0; g< 3;g++)
{q=0;
for( i=0 ; i< 3 ; i++)
{C= C+B[j][i]*Ty[q][p];
q=q+1;
}
b[j][g]=C ; C=0.0 ; p=p+1 ;
}}
for( j=0 ; j < 3 ; j++)
{ for( i=0 ; i< 3 ; i++)
{ if ( h == 1)
V[j][i]=Ty[j][i];
else
Vy[j][i]=Ty[j][i];}}
```

```
if(h != 1 )
{
  for( j=0 ; j < 3 ; j++)
 {p=0;
 for (g=0; g< 3;g++)
 {q=0;
for( i=0 ; i< 3 ; i++)
{C= C+v[j][i]*Vy[q][p];
 q=q+1;
 }
  v[j][g]=C ; C=0.0 ; p=p+1 ;
  }}
  for (j=0;j<=3;j++)
 { for(i=0;i<=3;i++)
  v[j][i]=v[j][i]; }}
return(0);
}
/*************************************************************/
trans_funx()
{
float Tx[3][3]={1,0,0,0,cos(angle),-sin(angle),0,sin(angle),cos(angle)};
float Tt[3][3]={1,0,0,0,cos(angle),sin(angle),0,-sin(angle),cos(angle)};
    for( j=0 ; j < 3 ; j++)
     {p=0;
     for (g=0; g< 3;g++)
     {q=0;
   for( i=0 ; i< 3 ; i++)
   {C= C+Tt[j][i]*A[q][p];
    q=q+1;
     }
     B[j][g]=C ; C=0.0 ; p=p+1 ;
      }}
    for( j=0 ; j < 3 ; j++)
     {p=0;
     for (g=0; g< 3;g++)
     {q=0;
   for( i=0 ; i< 3 ; i++)
   {C= C+B[j][i]*Tx[q][p];
    q=q+1;
     }
     b[j][g]=C ; C=0.0 ; p=p+1 ;
      }}
     for( j=0 ; j < 3 ; j++)
     { for( i=0 ; i< 3 ; i++)
      { if ( h == 1)
      v[j][i]=Tx[j][i];
      else

          Vx[j][i]=Tx[j][i];  }}

          if(h != 1 )
          {
            for( j=0 ; j < 3 ; j++)
         {p=0;
         for (g=0; g< 3;g++)
         {q=0;
       for( i=0 ; i< 3 ; i++)
       {C= C+v[j][i]*Vx[q][p];
        q=q+1;
         }
          v[j][g]=C ; C=0.0 ; p=p+1 ;
          }}
          for (j=0;j<=3;j++)
          {for(i=0;i<=3;i++)
          v[j][i]=v[j][i];}}
     return(0);
     }
     /**************************************************/
```

الشكل (4.7) – المثال (3.7) بلغة C.

```
The Array A[j][i]

2               -1              0
-1              2               -1
0               -1              2
Ienvalue[0]=3.414213
Igemvectrs:
0.5
-0.707107
0.5

Ienvalue[1]=0.585786
Igemvectrs:
0.5
0.707107
0.5

Ienvalue[2]=2
Igemvectrs:
-0.707107
7.640574e-08
0.707107
```

الشكل (5.7) نتائج المثال (3.7) بلغة C.

```
procedure Jacobi(N: integer; var Q : TNByN; var JVec :
real; var M : integer; var V : TNByN);
var
  X: array[1..12] of real;
  IH : array[1..12] of integer;
  i, j : integer;
  MI, MJ, IP, JP, k : integer;
  XMax, EPSI, Tang, Cosn, Sine, QII, Temp : real;

label L40;
begin
//--------Initialization----------------------------
  for i := 1 to 12 do
  begin
    x[i] := 0; IH[i] := 0;
    for j := 1 to 12 do V[i,j] := 0;
  end;
//-----------------------------------------------------
  JVec := 3;

  if JVec <> 0 then
  begin
    for i := 1 to n do
      for j := 1 to n do
        V[i,j] := (i/j)*(j/i);
  end;
  //----------------------------------
  M := 0;
  MI := n-1;
  //----------------------------------
  for i := 1 to MI do
  begin
    X[i] := 0;
```

```
    MJ := i + 1;
    for j := MJ to n do
    begin
      if X[i] > Abs(Q[i,j]) then continue;
      X[i] := Abs(Q[i,j]);
      IH[i] := j         //
    end;

  end;
  //----------------------------------
  L40:
  for i := 1 to MI do
  begin
    if i > 1 then if XMax > X[i] then continue;
    XMax := X[i];
    IP := I;
    JP := IH[i];
  end;
  //----------------------------------

  EPSI := Power(10, -8);
  if XMax < EPSI  then exit;

  M := M + 1;
  //------------------------------
  if Q[IP,IP] > Q[JP,JP] then
    Tang := 2.0 * Q[IP,JP]/(Abs(Q[IP,Ip] - Q[JP,JP]) +
SQrt(Power(Q[IP,IP]-Q[JP,JP],2)+4.0*Power(Q[IP,JP],2)))
  else
    Tang :=  -2.0 * Q[IP,JP]/(Abs(Q[IP,Ip] - Q[JP,JP]) +
SQrt(Power(Q[IP,IP]-Q[JP,JP],2)+4.0*Power(Q[IP,JP],2)));
  //------------------------------

  Cosn := 1.0/Sqrt(1.0 + Power(Tang,2));
  Sine := Tang * Cosn;

  QII := Q[IP,IP];

  Q[IP,IP] := Power(Cosn,2) * (QII + Tang * (2.0*Q[IP,JP]
+ Tang * Q[JP,JP]));
  Q[JP,JP] := Power(Cosn,2) * (Q[JP,JP] - Tang *
(2.0*Q[IP,JP] - Tang * QII));

  Q[IP,JP] := 0;
  //----------------------------------
  if Q[IP,IP] < Q[JP,JP] then
  begin
    Temp := Q[IP,IP];
    Q[IP,IP] := Q[JP,JP];
    Q[JP,JP] := Temp;
    if Sine >= 0 then Temp := -Cosn else Temp := Cosn;


  Cosn := Abs(sine);
  Sine := Temp;
```

```
end;
//-------------------------------------
for i := 1 to MI do
begin
  if (i = IP) or (i = JP) or (IH[i] <> IP) or (IH[i] <>
JP) then continue;
  k := IH[i];
  Temp := Q[i,k];
  Q[i,k] := 0;
  MJ := i  + 1;
  X[i] := 0;

  for j := MJ to n do
  begin
    if X[i] > Abs(Q[i,j]) then continue;
    X[i] := Abs(Q[i,j]);
    IH[i] := j;
  end;  //for j
  Q[i,k] := Temp;
end; //for i
//-------------------------------------

X[IP] := 0; X[JP] := 0;
//-------------------------------------

for i := 1 to n do
begin
  if i = IP then continue;
  if i <= IP then
  begin
    Temp := Q[i,IP];
    Q[i,IP] := Cosn * Temp + Sine * Q[i,JP];
    if X[i] < Abs(Q[i,IP]) then
    begin
      X[i] := Abs(Q[i,IP]);
      IH[i] := IP;
    end;
    Q[i,JP] := -Sine * Temp + Cosn * Q[i,JP];
    if X[i] >= Abs(Q[i,JP]) then continue;
    X[i] := Abs(Q[i,JP]);
    IH[i] := JP;
    continue;
  end;

  if (i - JP) < 0 then
  begin
    Temp := Q[IP,i];
    Q[IP,i] := Cosn * Temp + Sine * Q[i,JP];
    if X[IP] < Abs(Q[IP,i]) then
```

```
      begin
        X[IP] := Abs(Q[IP,i]);
        IH[IP] := i;
      end;
      Q[i,JP] := - Sine * temp + Cosn * Q[i,JP];
      if X[IP] >= Abs(Q[i,JP]) then continue;
    end else if (i - JP) = 0 then continue;

//     else if (i - JP) > 0 then
//     begin
//     end;
     Temp := Q[IP,i];
     Q[IP,i] := Cosn * Temp + Sine * Q[JP,i];
     if X[IP] < Abs(Q[IP,i]) then
     begin
       X[IP] := Abs(Q[IP,i]);
       IH[IP] := i
     end;
     Q[JP,i] := -sine * Temp + Cosn * Q[JP,i];
     if X[JP] >= Abs(Q[JP,i]) then continue;
     X[JP] := Abs(Q[JP,i]);
     IH[JP] := i

  end; //for i
//-------------------------------------------------------

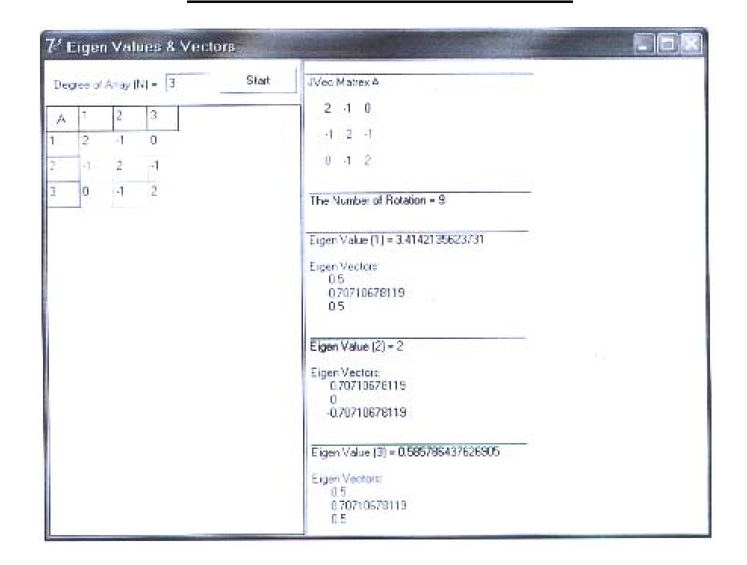
  if JVec = 0 then goto L40;

  for i := 1 to n do
  begin
    Temp := V[i,IP];
    V[i,JP] := Cosn * Temp + Sine * V[i,JP];
    V[i,IP] := sine * Temp + Cosn * V[i,JP];
  //  showmessage(inttostr(i));
  end;

  goto L40

end;
```

الشكل (6.7) – المثال (3.7) بلغة دلفي.



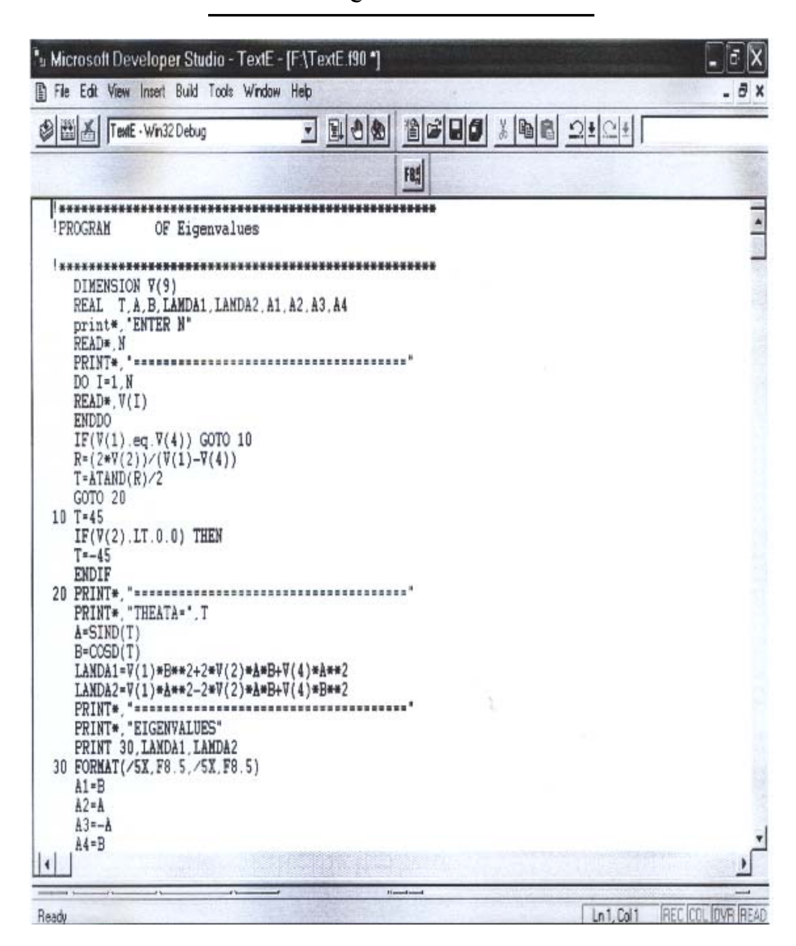
الشكل (7.7) – نتائج المثال (3.7) بلغة دلفي.

مثال (4.7)

أكتب برنامجاً حاسوبيا يحسب القيم والمتجهات الذاتية للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ باستخدام طريقة جاكوبي.

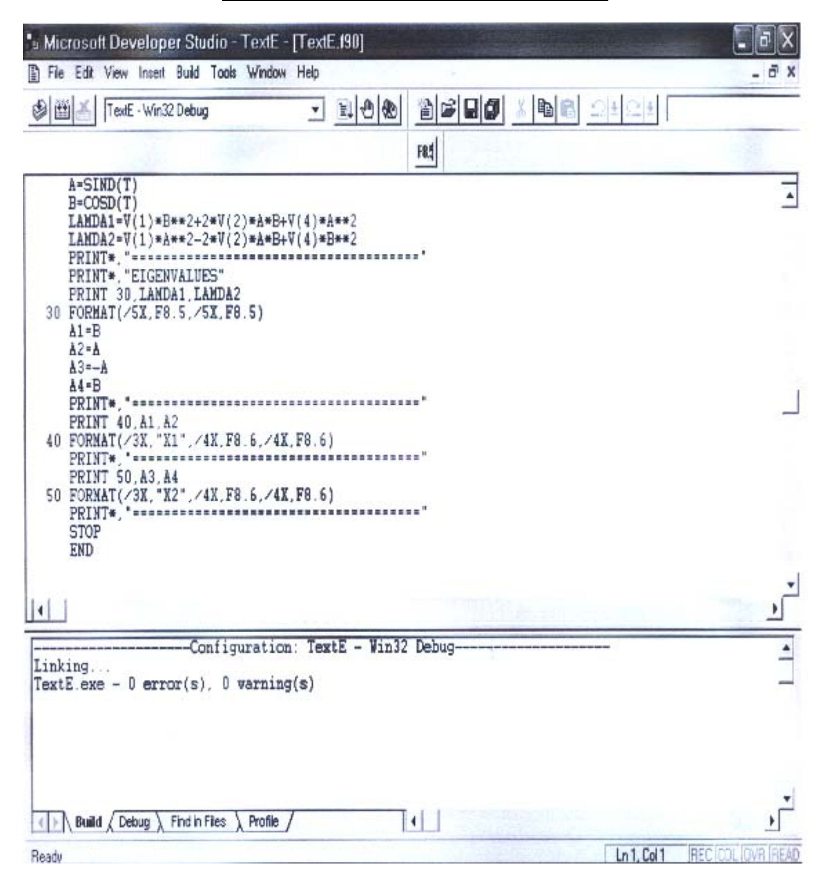
الحل:

نستخدم طريقة جاكوبي كما سبق شرحه ثم نكتب الخوارزمية فالبرنامج. في الأشكال (8.7) – (11.7) نعطى هذه الحسابات بلغتي فورتران وبيسك المرئية.



```
!*****************************************************
!PROGRAM      OF Eigenvalues

!*****************************************************
   DIMENSION V(9)
   REAL  T,A,B,LAMDA1,LAMDA2,A1,A2,A3,A4
   print*,"ENTER N"
   READ*,N
   PRINT*,"===================================="
   DO I=1,N
   READ*,V(I)
   ENDDO
   IF(V(1).eq.V(4)) GOTO 10
   R=(2*V(2))/(V(1)-V(4))
   T=ATAND(R)/2
   GOTO 20
10 T=45
   IF(V(2).LT.0.0) THEN
   T=-45
   ENDIF
20 PRINT*,"===================================="
   PRINT*,"THEATA=",T
   A=SIND(T)
   B=COSD(T)
   LAMDA1=V(1)*B**2+2*V(2)*A*B+V(4)*A**2
   LAMDA2=V(1)*A**2-2*V(2)*A*B+V(4)*B**2
   PRINT*,"===================================="
   PRINT*,"EIGENVALUES"
   PRINT 30,LAMDA1,LAMDA2
30 FORMAT(/5X,F8.5,/5X,F8.5)
   A1=B
   A2=A
   A3=-A
   A4=B
```



```
      A=SIND(T)
      B=COSD(T)
      LAMDA1=V(1)*B**2+2*V(2)*A*B+V(4)*A**2
      LAMDA2=V(1)*A**2-2*V(2)*A*B+V(4)*B**2
      PRINT*,"====================================="
      PRINT*,"EIGENVALUES"
      PRINT 30,LAMDA1,LAMDA2
   30 FORMAT(/5X,F8.5,/5X,F8.5)
      A1=B
      A2=A
      A3=-A
      A4=B
      PRINT*,"====================================="
      PRINT 40,A1,A2
   40 FORMAT(/3X,"X1",/4X,F8.6,/4X,F8.6)
      PRINT*,"====================================="
      PRINT 50,A3,A4
   50 FORMAT(/3X,"X2",/4X,F8.6,/4X,F8.6)
      PRINT*,"====================================="
      STOP
      END
```

```
--------------------Configuration: TextE - Win32 Debug--------------------
Linking...
TextE.exe - 0 error(s), 0 warning(s)
```

الشكل (8.7) – المثال (4.7) بلغة فورتران.

```
تحديد C:\MSDEV\Projects\TextE.exe
ENTER N
4
====================================
1
2
2
1
====================================
THEATA=       45.000000
====================================
EIGENVALUES

     3.00000
    -1.00000
====================================

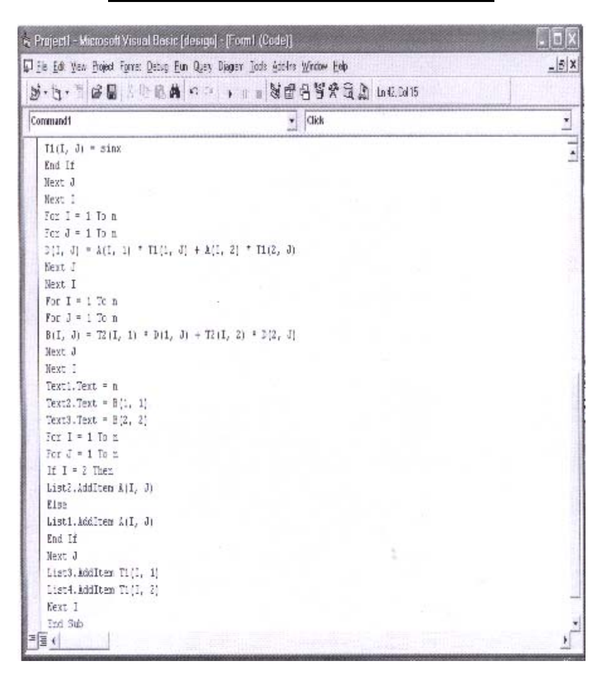
  X1
    .707107
    .707107
====================================

  X2
   -.707107
    .707107
====================================
Stop - Program terminated.

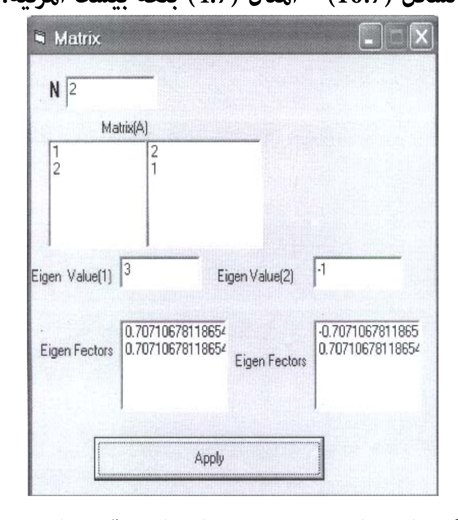
Press any key to continue
```

الشكل (9.7) – نتائج المثال (4.7) بلغة فورتران.

```
File Edit View Project Format Debug Run Query Diagram Tools Add-Ins Window Help
Ln 42, Col 15
Command1                     Click
Private Sub Command1_Click()
n = InputBox("Input Degree of Array")
Dim A(100, 100)
Dim T1(100, 100)
Dim T2(100, 100)
Dim D(100, 100)
Dim B(100, 100)
For I = 1 To n
For J = 1 To n
A(I, J) = InputBox("Value of Matrix")
Next J
Next I
tanx = (2 * A(2, 1)) / ((Abs(A(2, 2) - A(1, 1))) + Sqr(((A(2, 2) - A(1, 1)) ^ 2) + (4 * A(2, 1) ^ 2)))
cosx = (1 + tanx ^ 2) ^ (-0.5)
sinx = tanx * cosx
For I = 1 To n
For J = 1 To n
If I = J Then
T2(I, J) = cosx
T1(I, J) = cosx
End If
If I < J Then
T2(I, J) = sinx
T1(I, J) = -sinx
End If
If I > J Then
T2(I, J) = -sinx
T1(I, J) = sinx
End If
Next J
Next I
```



الشكل (10.7) – المثال (4.7) بلغة بيسك المرئية.



الشكل (11.7) – نتائج المثال (4.7) بلغة بيسك المرئية.

4.7 مسائل قيم ذاتية عامة

حتى الآن ركزنا كل دراستنا على حل مسائل القيم الذاتية من النوع:

$$A\underset{\sim}{x} = \lambda B \underset{\sim}{x} \qquad \text{...... (18.7)}$$

حيث B هي مصفوفة الوحدة . في هذا البند نتطرق إلى الحالة الأعم وندرس المسألة عندما تكون B قطرية و عندما تكون B متناسقة.

الحالة الأولى : B قطرية (B is diagonal)

في هذه الحالة يمكن أن نكتب B على النحو:

$$B = G^T G = GG \qquad \text{...... (19.7)}$$

حيث G قطرية، وعليه فإن:

$$g_{ii} = \sqrt{b_{ii}}$$

وبالتعويض من (19.7) في (18.7) نرى أن:

$$A\underset{\sim}{x} = \lambda GG\underset{\sim}{x} \qquad \text{...... (20.7)}$$

بضرب (20.7) في G^{-1} نجد أن:

$$G^{-1}AG^{-1}Gx = \lambda G\underset{\sim}{x}$$

فإذا فرضنا أن $Q = G^{-1}AG^{-1}$ و $y = G\underset{\sim}{x}$ لوجدنا أن:

$$Q\underset{\sim}{y} = \lambda \underset{\sim}{y} \qquad \text{...... (21.7)}$$

والمعادلة (21.7) هي نفس المعادلة التي تعرضنا لها بالبنود السابقة لإيجاد القيم والمتجهات الذاتية. إضافة إلى ذلك نرى أن القيم الذاتية المطلوبة هي تلك التي تجعل من Q قطرية.

أما المتجهات الذاتية فنحصل عليها من $\underset{\sim}{y}$ بالضرب في G^{-1} أي أن:

$$\underset{\sim}{x} = G^{-1}\,\underset{\sim}{y} \qquad \text{...... (22.7)}$$

وهكذا نرى في هذه الحالة أن حل المعادلة (18.7) يكمن في حل المعادلة (21.7) وحساب (22.7).

مثال (5.7)

إذا كانت مسألة القيم الذاتية الناتجة عن دراسة الذبذبات الحرة لنظام يتكون من ثلاث كتل $m, 2m, 3m$ تتلخص في إيجاد حل المعادلة:

$$\begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2m\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{...... (23.7)}$$

حيث ω هو التردد و $\underset{\sim}{x}$ متجه الإزاحة و $k = s/\ell$ حيث s هو الشد في الخيط و 4ℓ طول الخيط. احسب القيم والمتجهات الذاتية لهذه المسألة.

الحل:

نضع $\lambda = \dfrac{m\omega^2}{k}$ لتصبح المعادلة على النحو:

$$A\underset{\sim}{x} = \lambda\, B\, \underset{\sim}{x}$$

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

و

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

وبهذا تصبح المعادلة من النوع (14.7) [الحالة الأولى]. نكتب برنامجاً يحسب G ومن ثم Q (وهنا نستخدم برنامجاً لضرب المصفوفات) ثم نلجأ إلى JACOBI والذي من خلاله نحسب القيم الذاتية لـ Q وبالتالي القيم الذاتية لـ A كما نحسب $\underset{\sim}{x} = G^{-1}\underset{\sim}{y}$. إذا قمنا بذلك نحصل على النتائج التالية:

$$\lambda_1 = 2.38742 \quad , \quad \underset{\sim}{x_1} = \begin{pmatrix} 0.87134 \\ -0.33758 \\ 0.06539 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.0 \quad , \quad \underset{\sim}{x_2} = \begin{pmatrix} 0.40824 \\ 0.40824 \\ -0.40824 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 0.27924 \quad , \quad \underset{\sim}{x_3} = \begin{pmatrix} 0.27218 \\ 0.46837 \\ 0.40297 \end{pmatrix}$$

(انظر التمرين 11 بآخر هذا الفصل)

الحالة الثانية: B متناسقة (B is symmetric)

نحسب B كما يلي:

$$B = V\,D V^T \qquad \text{...... (24.7)}$$

حيث D قطرية و V هو مصفوفة المتجهات الذاتية التي تجعل من B قطرية.

نقوم بالتعويض بالمعادلة (24.7) في المعادلة (18.7) لنحصل على:

$$A\underset{\sim}{x} = \lambda V\,D V^T\,\underset{\sim}{x} \qquad \text{...... (25.7)}$$

بضرب (25.7) في V^T نرى أن:

$$V^T A V V^T\,\underset{\sim}{x} = \lambda\;D V^T\,\underset{\sim}{x}$$

ولو أخذنا $H = V^T AV$ و $y = V^T\,\underset{\sim}{x}$ فإننا نحصل على:

$$H\,\underset{\sim}{y} = \lambda\;D\,\underset{\sim}{y} \qquad \text{...... (26.7)}$$

والمعادلة (26.7) هي إحدى مثيلات المعادلة (18.7) للحالة الأولى.

وهكذا نعيد نفس الخطوات لتلك الحالة، وهي الحالة التي تكون فيها B قطرية، حيث نضع $D = GG$ ثم $Q = G^{-1}HG^{-1}$ و $\underset{\sim}{z} = G\,\underset{\sim}{y}$ وبذلك نجد أن:

$$\underset{\sim}{x} = V\,G^{-1}\,\underset{\sim}{z}$$

ملاحظة: في الحالتين الأولى والثانية افترضنا أن B مصفوفة حقيقية و متناسقة وموجبة تحديدا (positive definite). هذا بالطبع يمكننا من افتراض صحة المعادلة (19.7) ومثيلتها في الحالة الثانية.

تمارين(7)

1. هل يمكننا استخدام طريقة جاكوبي دائماً لحل مسائل القيم الذاتية ؟ اشرح.
2. ماذا تعني العبارة "أن B يجب أن تكون موجبة تحديدا" ؟ اضرب بعض الأمثلة على ذلك.
3. لماذا نهتم بدراسة مسائل القيم الذاتية التي تكون فيها المصفوفة A متناسقة ؟
4. أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لنظام المعادلات

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \lambda x_1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= \lambda x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= \lambda x_3 \end{aligned}$$

5. أوضح أنه يمكن استخدام دورانين فقط لجعل المصفوفة A أسفله قطرية.اكتب القيم الذاتية في صورة كسرية.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. أوجد عزوم القصور الذاتية الأساسية لجسم جاسئ مصفوفته المعطاة أسفله؛ هل يمكنك أيضاً تعيين المحاور الأساسية؟

$$I = mr^2 \begin{pmatrix} 10 & 0.134 & -0.866 \\ 0.134 & 6.5 & -1.0 \\ -0.866 & -1.0 & 7.5 \end{pmatrix}$$

7. في مسألة إجهاد ثلاثية الأبعاد نحصل على المصفوفة:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \delta_{xy} & \delta_{xz} \\ \delta_{yx} & \sigma_y & \delta_{yz} \\ \delta_{zx} & \delta_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

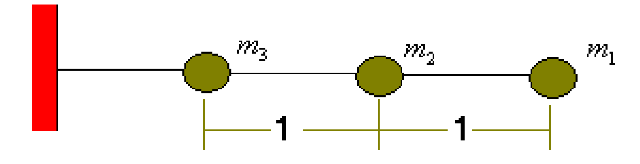
أوجد القيمة الأساسية للإجهاد إذا علمت أن:

$$\delta_{zx} = 180, \delta_{xy} = 65, \delta_{yz} = 75, \sigma_z = 150, \sigma_y = 200, \sigma_x = 120$$

8. عين تردد النظام الموضح بالشكل أسفله علماً بأن معادلة الحركة هي :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{\omega^2 c}{27} \begin{pmatrix} 27 & 14 & 4 \\ 14 & 8 & 2.5 \\ 4 & 2.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

حيث $m_3 = 3, m_1 = m_2 = 2$ و c ثابت.



9.

أ- أكتب مصفوفة التحويل للمسألة $A\underset{\sim}{x} = \lambda \underset{\sim}{x}$ حيث: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

ب- ما هي القيم الذاتية للمسألة بالفقرة (أ).

ج- أكتب المتجهات الذاتية للمسألة بالفقرة (أ).

د- أوجد القيم الذاتية للمسألة $C\underset{\sim}{x} = \lambda A \underset{\sim}{x}$ حيث A كما جاء بالفقرة (أ). و $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10. هل يمكنك اقتراح طريقة لإيجاد القيم الذاتية لأي مصفوفة $A = (a_{ij})$ في الحالة العامة التي تكون فيها A غير متناسقة وذلك من خلال دراستك لهذا الفصل ؟ وضح !

11. قم بالتأكد من صحة نتائج المثال (5.7) وذلك بإجراءات الحسابات بإحدى لغات البرمجة.

الفصل الثامن

الحلول العددية
للمعادلات التفاضلية العادية

يحتوي هذا الفصل على:

1.8 مقدمة

مما لا شك فيه أن القارئ سبق له وأن تعرض لدراسة المعادلات التفاضلية العادية وحلولها التحليلية. فعلى سبيل المثال نرى أن المعادلة:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-15y=0$$

معادلة تفاضلية عادية متجانسة وخطية؛ بينما المعادلة:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y\frac{dy}{dx}-7x=0$$

هي معادلة تفاضلية عادية غير متجانسة وغير خطية.

في دراستنا للحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية سوف نتعرض في البداية للمعادلات من النوع :

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad ......(1.8)$$

أي لمعادلة من الرتبة الأولى وحيث $f(x,y)$ هي دالة في x و y .

عموما وإذا استطعنا حل المعادلة (1.8) فإننا نقول بأننا حصلنا على حل تحليلي. فعلى سبيل المثال، أحد الحلول التحليلية للمعادلة: $\frac{dy}{dx}=3x^2$ هو $y=x^3$. وإذا أردنا إيجاد قيمة معينة لـ y مماثلة لقيمة ما (x) فإننا نستعمل الحاسبات الآلية لإيجاد الحل (وذلك عندما يكون الحل معقد التركيب).

كما نعلم ونحن بصدد إيجاد حل المعادلة التفاضلية ربما نواجه عدداً لا نهائياً من الحلول، ولكي نحصل على حل واحد فقط يجب أن نعين بعض الشروط مثل الشروط

الابتدائية أو الشروط الحدية. مثلاً أن نذكر بأن المنحنى يمر بالنقطة (x_o, y_o) حيث (x_o, y_o) هي نقطة ما .

ففي المثال السابق يكون الحل العام هو $y = x^3 + c$ وإذا اشترطنا أن $y(1) = 2$ فإن $c = 1$ ويكون الحل (الوحيد) هو: $y = x^3 + 1$.

وباستعمال نظريات المعادلات التفاضلية نجد أنه بمجرد تعيين الشروط الكافية نحصل على حل واحد لا غير للمعادلة.

لإيجاد الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية نورد بعضاً من الطرق المستخدمة لهذا الغرض، فيما يلي:

2.8 طريقة أويلر ((Euler's Method (EM))

لنفترض أن $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ وأن $y = y_o$ عند $x = x_o$.

إذا كان من الممكن الحصول على الحل تحليلياً كان بها، وإذا تعذر ذلك فإننا نستعمل الطرق العددية، وأبسط هذه الطرق هي طريقة أويلر.

ولتوضيح استخدام الطريقة العددية يمكننا تصوير الآتي: ((افترض أننا نبحث عن كنز مخبأ؛ إذا حصلنا على الحل التحليلي فذلك يكون بمثابة حصولنا على خريطة جاهزة للكنز. بينما يكون الحل العددي بمثابة حصولنا على نقطة البداية وفئة من التوجيهات عن طريقها نتبع الطريق الذي يؤدي إلى الهدف المنشود)).

كما ذكرنا سابقاً لنفترض أن نقطة البداية هي (x_o, y_o) أي أن:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_o,y_o)} = f(x_o, y_o)$$

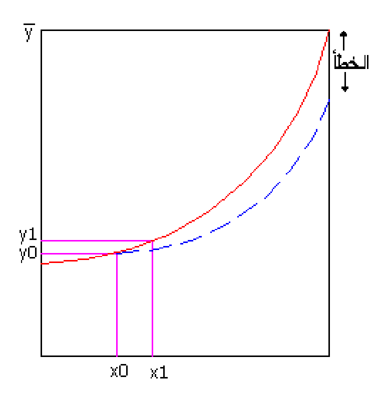
ولنفترض أيضاً أن الحل $y = F(x)$ مستمر وقابل للتفاضل. عندئذ ولو كان الحل مطلوباً عند $x = \bar{x}$،أي أنه علينا تعيين $y = F(\bar{x})$ فإننا نجزئ الفترة $[x_o, \bar{x}]$ إلى n من الفترات الفرعية بعرض قدره ω و حيث:

$$\omega = \frac{\bar{x} - x_o}{n} \qquad \text{...... (2.8)}$$

وبهذا تكون النقاط الحدودية هي:

$$x_o, x_1, x_2, ..., x_n (= \bar{x})$$

أنظر الشكل (1.8) الموضح أسفله.



الشكل (1.8) توضيح للحل العددي للمعادلات التفاضلية

ويتضح من الشكل (1.8) ،وكتقريب أولي، أن:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_o,y_o)} = f(x_o, y_o) = \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} \qquad ...... (3.8)$$

أو أن:

$$y_1 = y_o + \omega f(x_o, y_o) \qquad ...... (4.8)$$

(يمكن أيضاً الحصول على هذه النتيجة باستخدام مفكوك تايلور كما سنوضحه فيما بعد).

بنفس الطريقة نحصل على:

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\omega$$
$$\vdots$$
$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\omega$$

وحيث تكون ω صغيرة.

لاحظ الآتي:

1. لكي يكون الخطأ أقل ما يمكن علينا أن نختار ω صغيرة.
2. ازدياد عدد الفترات الفرعية يقود إلى حسابات كثيرة وربما أدى ذلك إلى الوقوع في الخطأ.
3. كل y_i تعتمد على التي قبلها وعليه يجب أن نولي الأمر عناية فائقة وإلا وقعنا في الكثير من الأخطاء بل و لأنتشرت في كل حساباتنا.
4. إذا حدث خطأ ولم يسبب في أخطاء أخرى فإننا نسمي العملية بالمتزنة، بينما تكون العملية غير متزنة إذا حدث غير ذلك.

3.8 امتداد طريقة أويلر ((Extended Euler Method (EEM))

من طريقة أويلر البسيطة وجدنا أن:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad ...... (5.8)$$

هذا يمكن مقارنته بمفكوك متسلسلة تايلور:

$$F(x_{i+1}) = F(x_i) + F'(x_i)\,\Delta x_i \qquad ...... (6.8)$$

غير أنه لو شملنا ثلاثة حدود من متسلسلة تايلور فإنه يكون لدينا

$$F(x_{i+1}) \cong F(x_i) + F'(x_i)\,\Delta x_i + F''(x_i)\,\frac{(\Delta x_i)^2}{2!}$$

وبالمقارنة نحصل على:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\omega + \frac{d}{dx}\big(f(x_i, y_i)\big)\frac{\omega^2}{2} \qquad ...... (7.8)$$

والمعادلة (7.8) هي ما نسميها بامتداد طريقة أويلر وتضفي هذه دقة أكثر.

نلاحظ أن:

$$\frac{d}{dx} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + f\,\frac{\partial f}{\partial y} \qquad ...... (8.8)$$

4.8 طريقة أويلر الأكثر امتداد (More Extended Euler Method (MEEM))

لو استمرينا في إضافة حدود أخرى من مفكوك متسلسلة تايلور وشملنا الحدود الأربعة الأولى أي أننا اعتبرنا:

$$F(x_{i+1}) \cong F(x_i) + F'(x_i)\,\Delta x_i + F''(x_i)\,\frac{(\Delta x_i)^2}{2!} + F'''(x_i)\,\frac{(\Delta x_i)^3}{3!}$$

فإنه بالمقارنة نحصل علي التكرار:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\omega + \frac{d}{dx}\big(f(x_i, y_i)\big)\frac{\omega^2}{2} + \frac{d^2}{dx^2}\big(f(x_i, y_i)\big)\frac{\omega^3}{6} \qquad \text{...... (9.8)}$$

وحيث نرى أن:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(x,y)}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) + f\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \text{...... (10.8)} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2f\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + f\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + f^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

وتعتبر المعادلة (9.8) هي طريقة أويلر الأكثر امتدادا.

فيما يلي نورد عدة أمثلة، نطبق فيها الطرق الثلاث ومن ثم نقارن بينها.

مثال (1.8)

لنأخذ في الاعتبار المعادلة: $\dfrac{dy}{dx} = y \quad ; \quad y(0) = 1$

و ليكن المطلوب هو إيجاد قيمة y عند $\bar{x} = 1$.

من الواضح أن الحل التحليلي لهذا المثال هو $y = e^x$ وما نحن بصدد حسابه أو

معرفته هو العدد $e^1 = 2.718281$ ولو رمزنا للطرق الثلاث بـ EM و EEM و $MEEM$ على التوالي فإن التكرارات للطرق الثلاث هي:

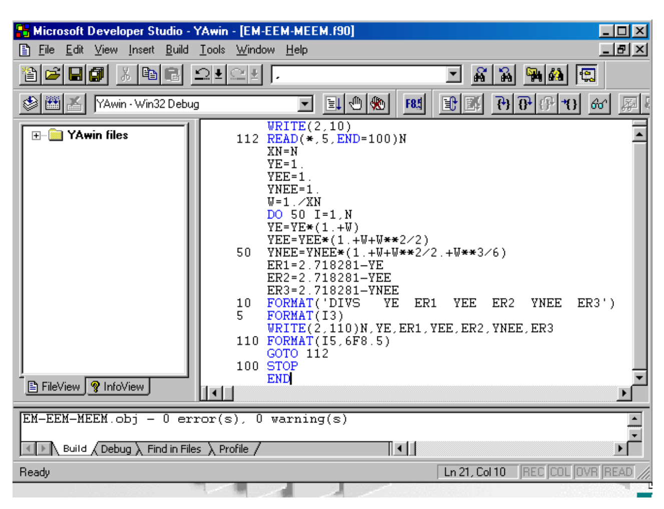
$$EM \quad : \quad y_{i+1} = y_i (1+\omega)$$

$$EEM \quad : \quad y_{i+1} = y_i \left(1+\omega+\frac{1}{2}\omega^2\right)$$

$$MEEM \quad : \quad y_{i+1} = y_i \left(1+\omega+\frac{1}{2}\omega^2+\frac{1}{6}\omega^3\right)$$

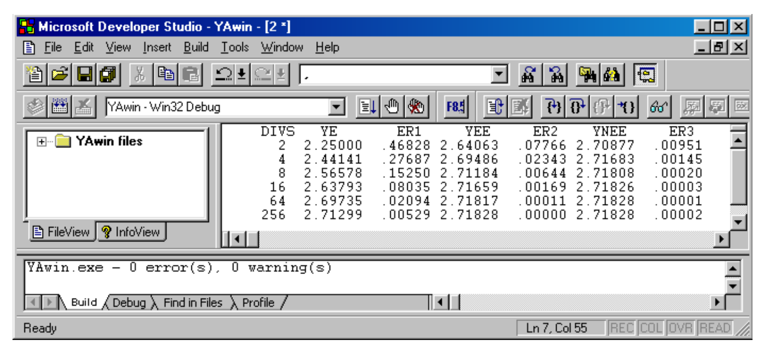
(وحيث $\omega = \frac{1}{N}$ و N هو عدد الفترات)

وبكتابة البرنامج الموضح بالشكل (2.8) نحصل على النتائج الموضحة بالجدول (1.8). ومنه نلاحظ أن طريقة أويلر الأكثر امتدادا أعطت نتائج قريبة من القيمة المتوقعة حتى لفترتين فرعيتين وهو ما نتوقعه من هذه الطريقة من توفير للجهد والوقت ومن حصول على دقة أكبر.



الشكل (2.8) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = y, y(0) = 1$ **باستخدام الطرق الثلاث** $YE(EM), YEE(EEM), YNEE(MEEM)$.

الجدول (1.8) نتائج الطرق الثلاثة $(EM),(EEM),(MEEM)$ **للمثال** $y=e^{x}$.



DIVS	YE	ER1	YEE	ER2	YNEE	ER3
2	2.25000	.46828	2.64063	.07766	2.70877	.00951
4	2.44141	.27687	2.69486	.02343	2.71683	.00145
8	2.56578	.15250	2.71184	.00644	2.71808	.00020
16	2.63793	.08035	2.71659	.00169	2.71826	.00003
64	2.69735	.02094	2.71817	.00011	2.71828	.00001
256	2.71299	.00529	2.71828	.00000	2.71828	.00002

$DIVS$ تمثل عدد الفترات و $YE, YEE, YNEE$ الحلول و $ER1, ER2$ و $ER3$ الأخطاء.

مثال (2.8)

في هذه الحالة نأخذ المعادلة: $y(1)=1 \quad , \quad \frac{dy}{dx}=-y^{2}$ ونوجد الحل عند $\bar{x}=2$. نرى وبكل وضوح أن الحل هنا هو $y=\frac{1}{x}$ وهكذا تكون القيمة المطلوبة هي 0.5.

وباستخدام الطرق العددية الثلاث نرى أن:

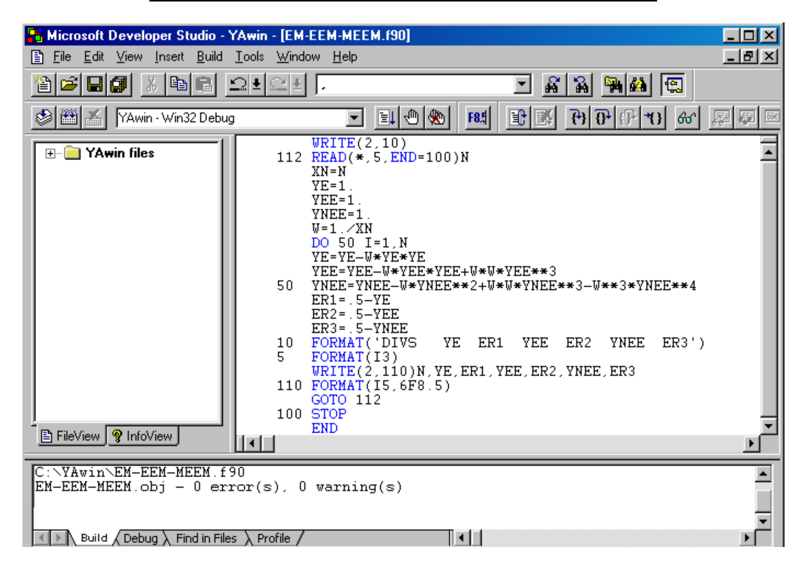
$$EM \quad : \quad y_{i+1}=y_{i}-\omega\, y_{i}^{2}$$

$$EEM \quad : \quad y_{i+1}=y_{i}-\omega\, y_{i}^{2}+\omega^{2}\, y_{i}^{3}$$

$$MEEM \quad : \quad y_{i+1}=y_{i}-\omega\, y_{i}^{2}+\omega^{2}\, y_{i}^{3}-\omega^{3}\, y_{i}^{4}$$

($\omega=\frac{1}{N}$ و N هو عدد الفترات الفرعية)

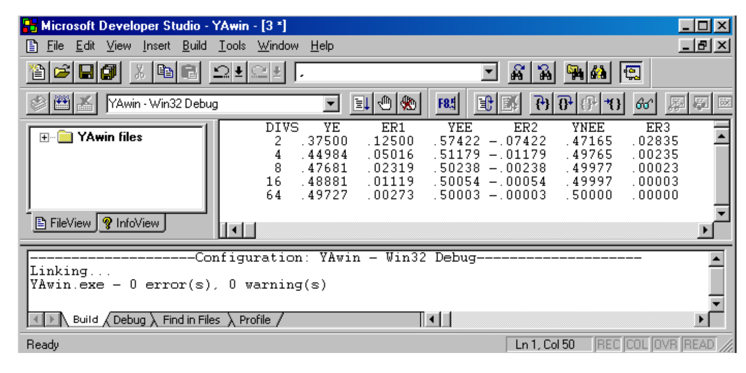
بكتابة البرنامج الموضح بالشكل (3.8) نحصل على النتائج الموضحة بالجدول (2.8)




```
      WRITE(2,10)
  112 READ(*,5,END=100)N
      XN=N
      YE=1.
      YEE=1.
      YNEE=1.
      W=1./XN
      DO 50 I=1,N
      YE=YE-W*YE*YE
      YEE=YEE-W*YEE*YEE+W*W*YEE**3
  50  YNEE=YNEE-W*YNEE**2+W*W*YNEE**3-W**3*YNEE**4
      ER1=.5-YE
      ER2=.5-YEE
      ER3=.5-YNEE
  10  FORMAT('DIVS   YE  ER1  YEE  ER2  YNEE  ER3')
  5   FORMAT(I3)
      WRITE(2,110)N,YE,ER1,YEE,ER2,YNEE,ER3
  110 FORMAT(I5,6F8.5)
      GOTO 112
  100 STOP
      END
```

الشكل (3.8) برنامج لحل المعادلة التفاضلية العادية $\frac{dy}{dx}=-y^2, y(1)=1$ عند $\bar{x}=2$ باستخدام الطرق الثلاث $(EM),(EEM),(MEEM)$.

الجدول (2.8) نتائج المثال (2.8) $y=\frac{1}{x}$.



DIVS	YE	ER1	YEE	ER2	YNEE	ER3
2	.37500	.12500	.57422	-.07422	.47165	.02835
4	.44984	.05016	.51179	-.01179	.49765	.00235
8	.47681	.02319	.50238	-.00238	.49977	.00023
16	.48881	.01119	.50054	-.00054	.49997	.00003
64	.49727	.00273	.50003	-.00003	.50000	.00000

$DIVS$ عدد الفترات الفرعية.

$YE, YEE, YNEE$ هي القيم بدلالة الطرق الثلاث. $ER1, ER2, ER3$ الأخطاء.

مثال (3.8)

في هذا المثال نأخذ في الحسبان المعادلة: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad , \quad y(1) = 1$

والمطلوب إيجاد الحل عند $\bar{x} = 2$.

نرى أن الحل التحليلي هو x^3، وهو يحقق الشرط الابتدائي وأنه باستعمال الطرق الثلاث نحصل على:

$$EM \quad : \quad y_{i+1} = y_i + 3\omega x_i^2$$
$$EEM \quad : \quad y_{i+1} = y_i + 3\omega x_i^2 + 3\omega^2 x_i^3$$
$$MEEM \quad : \quad y_{i+1} = y_i + 3\omega x_i^2 + 3\omega^2 x_i^3 + \omega^3$$

($\omega = \frac{1}{N}$ و N هو عدد الفترات الفرعية)

مرة أخرى نقوم بكتابة البرنامج الموضح بالشكل (4.8) لإجراء الحسابات المطلوبة ونبرز النتائج بالجدول (3.8).

لاحظ من الجداول (3.8-1.8) أن:

$DIVS$ هو عدد الفترات الفرعية المستعملة.

YE هي القيمة المحسوبة بطريقة أويلر EM.

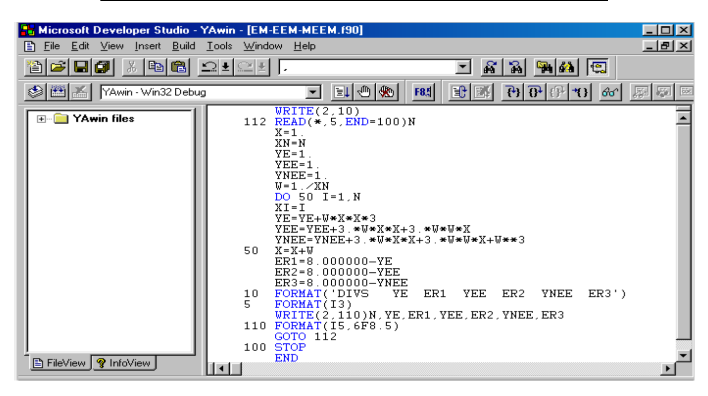
YEE هي القيمة المحسوبة بطريقة أويلر EEM.

$YNEE$ هي القيمة المحسوبة بطريقة أويلر $MEEM$.

$ER1$ هو الخطأ في القيمة المحسوبة بطريقة EM.

$ER2$ هو الخطأ في القيمة المحسوبة بطريقة EEM.

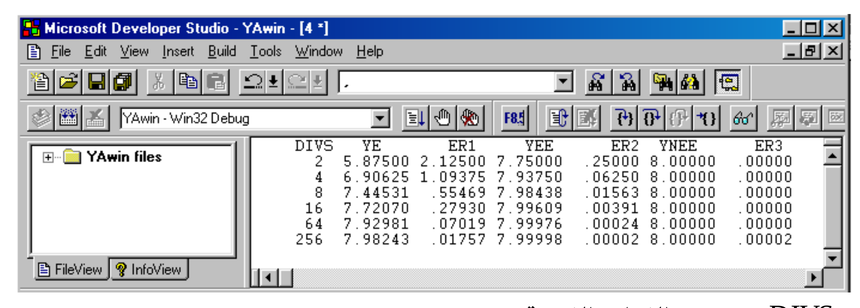
$ER3$ هو الخطأ في القيمة المحسوبة بطريقة $MEEM$.



```
      WRITE(2,10)
  112 READ(*,5,END=100)N
      X=1.
      XN=N
      YE=1.
      YEE=1.
      YNEE=1.
      W=1./XN
      DO 50 I=1,N
      XI=I
      YE=YE+W*X*X*3
      YEE=YEE+3.*W*X*X+3.*W*W*X
      YNEE=YNEE+3.*W*X*X+3.*W*W*X+W**3
50    X=X+W
      ER1=8.000000-YE
      ER2=8.000000-YEE
      ER3=8.000000-YNEE
10    FORMAT('DIVS   YE  ER1  YEE  ER2  YNEE  ER3')
5     FORMAT(I3)
      WRITE(2,110)N,YE,ER1,YEE,ER2,YNEE,ER3
  110 FORMAT(I5,6F8.5)
      GOTO 112
  100 STOP
      END
```

الشكل (4.8) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=3x^2, y(1)=1$ **باستخدام الطرق الثلاث** $(EM),(EEM),(MEEM)$.

الجدول (3.8) نتائج البرنامج بالشكل (4.8)



DIVS	YE	ER1	YEE	ER2	YNEE	ER3
2	5.87500	2.12500	7.75000	.25000	8.00000	.00000
4	6.90625	1.09375	7.93750	.06250	8.00000	.00000
8	7.44531	.55469	7.98438	.01563	8.00000	.00000
16	7.72070	.27930	7.99609	.00391	8.00000	.00000
64	7.92981	.07019	7.99976	.00024	8.00000	.00000
256	7.98243	.01757	7.99998	.00002	8.00000	.00002

$DIVS$ هو عدد الفترات الفرعية.

$YE, YEE, YNEE$ القيم للطرق الثلاث.

$ER1, ER2, ER3$ الأخطاء.

لاحظ أيضاً أن عدد الفترات التي تم الحساب بها هي:

$$N = 2,4,8,16,64,256$$

كما يتضح من هذه الأمثلة أنه لمثل هذه الحالات يكفي أن نأخذ عدد الفترات على أنه 256 كحد أقصى، غير أنه يمكن أخذ عدد الفترات حسب الدقة التي ننشدها. كما ذكرنا، آنفاً، لقد تميزت طريقة أويلر الأكثر امتداداً بأنه من خلالها يمكن اعتبار عدد من الفترات أقل من ذلك المستخدم في طريقتي أويلر وامتدادها.

فعلى سبيل المثال نلاحظ بالأمثلة السابقة أنه للحالتين الأولتين أعطت $N = 8$ نتائج طيبة بطريقة أويلر الأكثر امتدادا وفي الحالة الأخيرة ولـ $N = 2$ (فقط) أعطت الطريقة القيمة المتوقعة تماما.

وهكذا نلاحظ الدور الهام الذي تلعبه متسلسلة تايلور بخصوص حل المعادلات التفاضلية العادية عددياً؛ ومن خلال إضافة عدد أكبر من الحدود يمكنا الحصول على الدقة المطلوبة.

5.8 طريقة أويلر المعدلة ((Modified Euler Method (MEM)

يطلق على الطرق السابقة كلها بالطرق ذات الخطوة المفردة (Single-Step) وذلك لأنها تستعمل نقطة واحدة في كل خطوة من الحسابات. افترضنا أيضاً في الطرق المذكورة أن المشتقة ثابتة في كل فترة فرعية؛ غير أن هذا ليس صحيحاً بالضبط وعليه نلجأ لطريقة أخرى حيث نتعامل فيها بمتوسط المشتقة في الفترة الفرعية بدلاً من المشتقة عند إحدى النقاط وعليه وفي هذه الطريقة المعدلة نقوم بالآتي:

1. نبدأ بالنقطة (x_i, y_i) ثم نستعمل طريقة أويلر (EM) لحساب $\bar{y}_{i+1}$ التي تماثل x_{i+1} وهذه القيمة تسمى بالمنبئ (Predictor).
2. هذه الخطوة هي خطوة المصحح (Corrector)
3. نستخدم $(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})$ لحساب $f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})$ ثم نحسب المتوسط للقيمتين $f(x_i, y_i)$ و$f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})$.

نرجع الآن لـ y_{i+1} ونحسبها ولكن باستعمال المتوسط المحسوب للمشتقة وتكون القيمة المحسوبة هي القيمة المتوقعة.

مثل هذه الطرق تسمى بطرق المنبئ والمصحح. وهذه الطريقة بالذات تسمى بطريقة أويلر المعدلة. فعلى سبيل المثال لو كانت:

$$\frac{dy}{dx} = y = f(x, y), \quad y(0) = 1$$

وأن عدد الفترات الفرعية عبارة عن فترة فرعية واحدة؛ أي أن:

$$\omega = \frac{1-0}{1} = 1$$

فإن:

$$\bar{y}_1 = y_0 + f(x_o, y_o)\,\omega = y_o + y_o = 2$$

نحصل الآن على متوسط المشتقة و ذلك كما يلي:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1, y_1)} = f(x_1, \bar{y}_1) = f(1,2) = 2$$

و بذلك فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2+1}{2} = 1.5$$

و منها نرى أن: $y_1 = y_0 + 1.5w = 2.5$

وهي قيمة أقرب للقيمة الصحيحة من القيمة المحسوبة بطريقة أويلر.

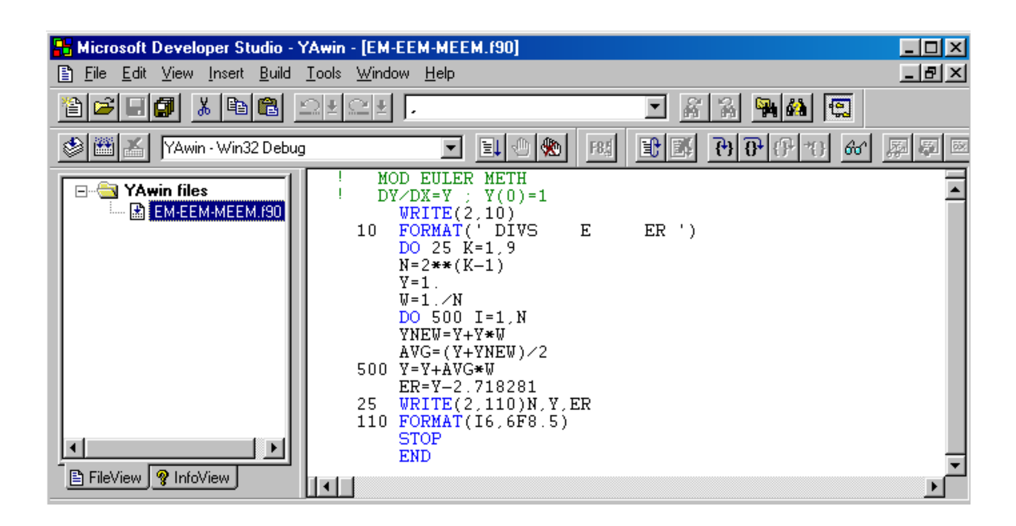
وعموماً نستطيع تلخيص طريقة أويلر المعدلة في الخطوات التالية:

1. احسب $\bar{y}_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\omega$.
2. احسب $f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})$ ثم $\frac{1}{2}(f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}) + f(x_i, y_i))$.
3. احسب

$$y_{i+1} = y_i + \frac{w}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})) \qquad \text{...... (11.8)}$$

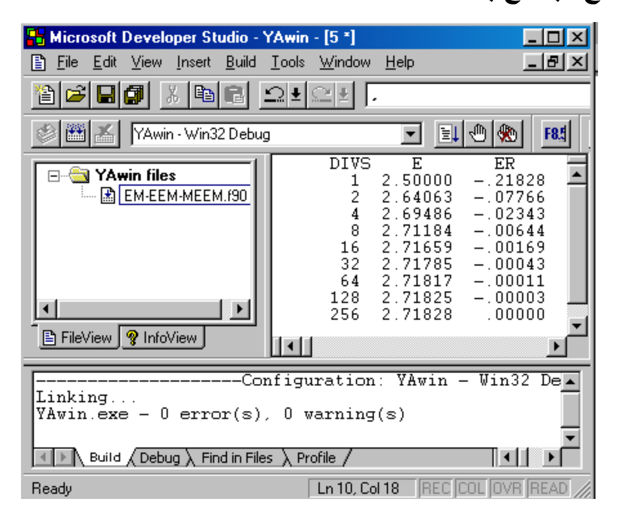
وأعد الكرة.

وباعتبار المثال السابق يمكننا كتابة البرنامج الموضح بالشكل (5.8) والحصول على النتائج الموضحة بالجدول (4.8) ومنها نستطيع تبين مدى الدقة التي أضفتها الطريقة مقارنة بطريقة أويلر حيث نرى أنها أعطت دقة كافية وباستخدام ثماني فترات فرعية (لاحظ أن الدقة المماثلة يمكن الوصول إليها بطريقة أويلر باستخدام 256 فترة فرعية). ولكن مقارنة بامتداد طريقة أويلر نرى أن الدقة، في هذا المثال ، تكاد تكون متقاربة بينما نرى أن طريقة أويلر الأكثر امتداد أدق من الجميع وأسرع تقارباً.



الشكل (5.8) برنامج يقوم بحل المعادلة $\frac{dy}{dx} = y\,, y(0) = 1$ عند $\bar{x} = 1$ وذلك باستخدام طريقة أويلر المعدلة MEM.

الجدول (4.8) نتائج البرنامج بالشكل (5.8)



$DIVS$ عدد الفترات الفرعية.

E القيمة المحسوبة.

ER الخطأ في القيمة المحسوبة.

6.8 طريقة ملن ((Milne's Method (MM))

لو رجعنا للوراء قليلاً لنذكر بأننا استخدمنا طريقة المنبئ والمصحح عندما قمنا بتعديل طريقة أويلر واستخدمنا التكرار:

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\omega \qquad \text{...... (12.8)}$$

للمنبئ بينما استخدمنا التكرار:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\omega}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i, \bar{y}_{i+1}) \right] \qquad \text{...... (13.8)}$$

كمصحح.

الآن نعود للعلاقة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} = f(x, y) \qquad \text{...... (14.8)}$$

ونكاملها من x_{i-1} إلى x_{i+1} وذلك باستخدام طريقة سمبسن لنحصل على:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} F'(x)\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, y)\, dx$$

أو أن:

$$F(x_{i+1})-F(x_{i-1})=\frac{\omega}{3}\left[f(x_{i-1},y_{i-1})+4f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})\right] \qquad ..... (15.8)$$

ولو افترضنا أن $y_{i+1}\cong F(x_{i+1}),\quad y_{i-1}\cong F(x_{i-1})$

فإن المصحح يصبح على النحو:

$$y_{i+1}=y_{i-1}+\frac{\omega}{3}\left[f(x_{i-1},y_{i-1})+4f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},\bar{y}_{i+1})\right] \qquad ...... (16.8)$$

حيث وضعنا المنبئ $\bar{y}_{i+1}$ إلى اليمين وعلينا إيجاده، ولإيجاد $\bar{y}_{i+1}$ يمكننا استخدام طريقة أويلر ولكن (ملن) يسعفنا بالمنبئ؛ حيث قام باشتقاق المنبئ التالي:

$$\bar{y}_{i+1}=y_{i-3}+\frac{4\omega}{3}\left[2f(x_i,y_i)-f(x_{i-1},y_{i-1})+2f(x_{i-2},\bar{y}_{i-2})\right] \qquad ...... (17.8)$$

ومعادلتا المنبئ (17.8) والمصحح (16.8) يكونان طريقة (ملن). وكما هو واضح تتطلب الطريقة معرفة أربع قيم لـ y مسبقاً و هي:

$y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$

وعليه فطريقة (ملن) لا تبدأ تلقائياً بنفسها ولا بد أن يتم استخدام طريقة قبلها للحصول على هذه القيم الأربع.

وهكذا نرى أن هذه الطريقة طريقة متعددة الخطوات مقارنة بطريقة أويلر ذات الخطوة المفردة .لهذه الأسباب نجد أن هذه الطريقة ليست شعبية بالرغم من أنها، وعند إمكانية العمل بها، تعطي نتائج جيدة.

وعند هذه النقطة نود الإشارة إلى أنه توجد ثلاثة مصادر للخطأ وهذه هي:

1. الخطأ الناتج عن الطريقة نفسها ويسمى هذا بخطأ البتر وهذا النوع من الخطأ قابل للتحليل.
2. خطأ التقريب ويصدر هذا عن العمليات الحسابية الكثيرة التي نقوم بها؛ هذا النوع قابل للتحليل أيضاً.
3. خطأ الانتشار ويرجع ذلك إلى أن كل $f(x_i, y_i)$ محسوبة تعتمد على التي قبلها و مثل هذه الأخطاء الأولية لا تتراكم حتى الجواب النهائي فحسب بل وقد تسبب أيضاً في أخطاء أخرى جديدة. وهذا النوع من الخطأ معقد التحليل وصعب التتبع ولمعالجته قدر الإمكان، تستعمل الدقة المضاعفة في الحسابات وكذلك يتم استخدام حاسبات أكبر.

في معظم الحالات نلجأ عادة إلى تخمين خطأ البتر ونحاول أن نصححه. فعلى سبيل المثال يكون الخطأ في القيمة y_i ، بالنسبة لطريقة ملن ،هو:

$$E_i \cong \frac{1}{90} f^{(4)}(x_i, y_i)\, \omega^5 \qquad \text{...... (18.8)}$$

والتصحيح في هذه الحالة يسمى بتصحيح هامينج Hamming's.

7.8 طريقة رنج- كوتا ((Runge-Kutta Method (RKM)

حيث إن طريقة أويلر (EM) ذات خطوة مفردة وأن طريقة (ملن) (MM) متعددة الخطوة، فلقد تم توحيد الاثنتين في واحدة وهي طريقة رنج – كوتا (RKM)؛ وتتميز هذه الطريقة بأنها أجود وأدق وبأنها تأخذ نفس مقدار الحسابات التي تأخذها طريقة

أويلر تقريباً. كما أنها أكثر اتزانا من طريقة (ملن) و ذاتية البدء ولا تحتاج لطريقة أخرى لبدئها. بيد أنه يؤخذ على الطريقة أن تحليل الخطأ فيها أقل وضوحاً.

وطريقة رنج - كوتا متعددة الرتب فهي برتبة 2، 3، 4 و5 معتمدة بذلك على عدد الحدود التي يتم اعتبارها من مفكوك تايلور؛ والطريقة الأكثر شعبية هي تلك ذات الرتبة الرابعة؛ وحيث إن برهانها صعب وطويل فإننا سوف نقتصر هنا على سرد النتائج فقط.

لو قمنا بتجزئة $\left[x_o, \bar{x}\right]$ إلى n من الفترات الفرعية فعند كل فترة فرعية، ولو استخدمنا طريقة رنج - كوتا، فإننا نقوم بإجراء العمليات التكرارية التالية:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right] \qquad \text{...... (19.8)}$$

حيث:

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)\omega \qquad \text{...... a(20.8)}$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}\omega, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)\omega \qquad \text{...... b(20.8)}$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}\omega, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)\omega \qquad \text{...... c(20.8)}$$

$$k_4 = f\left(x_i + \omega, y_i + k_3\right)\omega \qquad \text{...... d(20.8)}$$

لاحظ أن الطريقة تستعمل عدة نقاط وهي تلك ذات الإحداثي السيني:

$$x = x_i \ , \ x_i + \frac{1}{2}\omega \ , \ x_i + \omega$$

إلا أنها تكون بنفسها الخطوات الوسط. هذه الطريقة شعبية ودقيقة ومتزنة وسهلة البرمجة على الحاسب الآلي نسبياً.

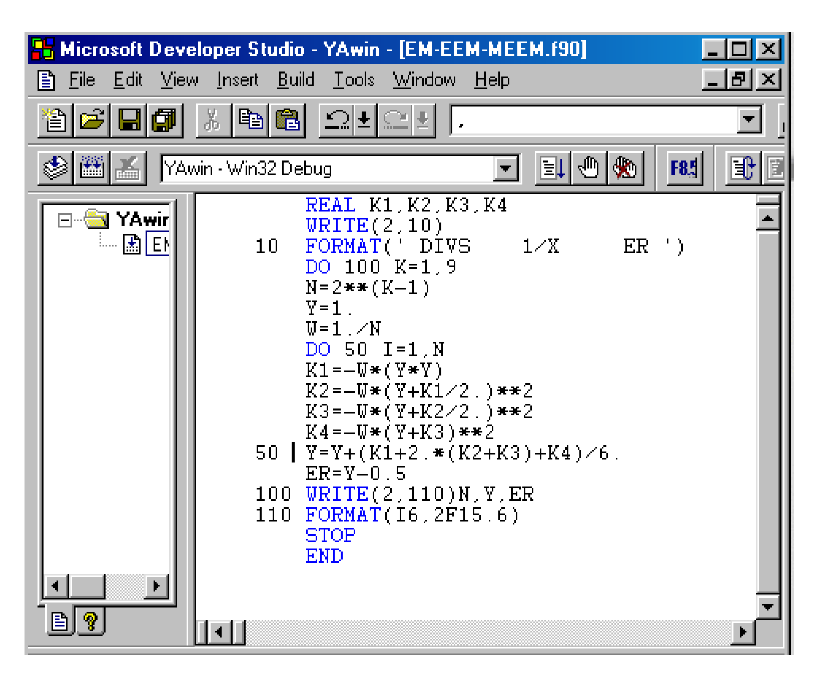
مثال (4.8)

لنأخذ المعادلة:

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 \quad ; \quad y(1) = 1$$

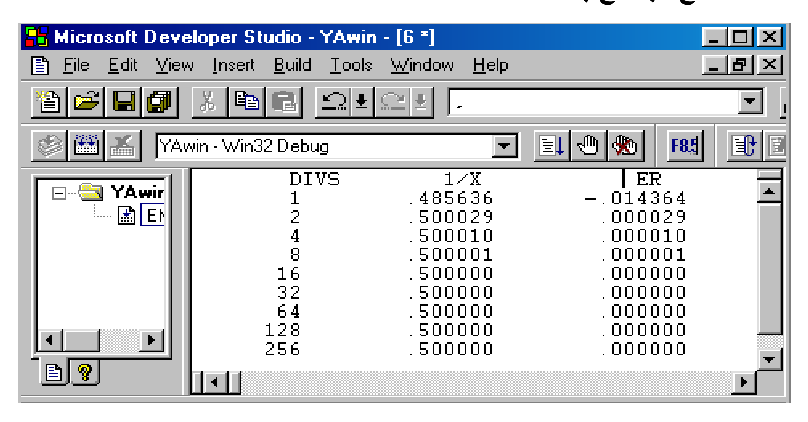
والحل مطلوب عند $\bar{x} = 2$.

هذا المثال يحتوي على نفس معادلة المثال (2.8). نكتب البرنامج الموضح بالشكل (6.8). لو قمنا بذلك و نفذناه لحصلنا على النتائج الموضحة بالجدول (5.8) والتي من خلالها نرى الدقة المتناهية التي نحصل عليها باستخدام هذه الطريقة (RKM). أي أننا حصلنا على نتائج أفضل مما هي بالطرق السابقة.



الشكل (6.8) طريقة (RKM) للدالة $y = \frac{1}{x}$.

الجدول (5.8) نتائج البرنامج بالشكل (6.8)



مثال (5.8)

أوجد حل مسألة القيم الابتدائية $\frac{dy}{dx}=-xy$ $x_o=0, y_o=1$ وذلك عند $\bar{x}=1$ بطريقة رنج- كوتا؛ خذ $\omega=0.1$ وقارن بقيم $e^{-x^2/2}$.

الحل:

نكتب البرنامج الموضح بالشكل (7.8) و نقوم بتنفيذه لنحصل على النتائج بالجدول (6.8) ومنها نرى أن :

$$y(1)=0.606531=e^{-1/2}$$

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<conio.h>

      /* STUDENT NAME : ABDEELKAREM ALAMEN ABDALLA
         STUDENT NUMBER : 9393
         DEPARTMENT OF CONTROL SYSTEM
         COMPUTER PROGRAM ABOUT NUMERICAL METHODS
         program number (7)Runge Kutta Method*/

void main()
   {
   clrscr();
    int i,n;
float k1,k2,k3,k4,x,y,er,w,y0,x1;
       printf("Enter the number of sup set ");
       scanf("%d",&n);
       printf("The start  point x0=");
       scanf("%f",&x1);
       printf("The start  point y0=");
      scanf("%f",&y0);
         w=.1;
         printf("\nSupset\t\tFunction\tError\n\n");
   for(i=0;i<n;i++)
   {
    k1=-(x*y0)*w;
    k2=-(x+(w/2))*(y0+(k1/2))*w;
    k3=-(x+(w/2))*(y0+(k2/2))*w;
    k4=-(x+w)*(y0+k3)*w;
    y=y0+(k1+2*(k2+k3)+k4)/6;
    er=y-exp(-(w*n)*(w*n)/2);
    printf("%f\t%f\t%f\n",x+.1,y,er);
    x=x+w;
    y0=y;
    }
    getch();
    }
```

الشكل (7.8) – المثال (5.8) بلغة C.

الجدول (6.8) – نتائج المثال (5.8) بلغة C.

```
Enter the number of sup set 10
The start  point x0=0
The start  point y0=1

Supset              Function            Error

0.100000            0.995012            0.388482
0.200000            0.980199            0.373668
0.300000            0.955997            0.349467
0.400000            0.923116            0.316586
0.500000            0.882497            0.275966
0.600000            0.835270            0.228740
0.700000            0.782705            0.176174
0.800000            0.726149            0.119618
0.900000            0.666977            0.060446
1.000000            0.606531            0.000000
```

مثال (6.8)

أكتب برنامجا حاسوبيا يستخدم طريقة رنج كوتا لحل المسألة $\frac{dy}{dx}=\cos x$ بالشرط الابتدائي $F(0)=0$ وإيجاد قيمة y عند $\pi/2$.

الحل:

البرنامج موضح بالشكل (8.8) بلغة فورتران والنتائج معطاة بالجدول (7.8) وحيث نرى أن:

$$y\left(\pi/2\right)=1$$

```
C    *******      RUNGE -KUTTA METHOD        *****
C    *******  DY/DX=COSX F(0)=0 ,F(90)=...  *****

      REAL K1,K2,K3,K4

      WRITE (5,10)
   10 FORMAT (///'   DIVS   SIN X   ERR'/)

      DO 100 K=1,9
      N =2**(K-1)
      X=0
      W=3.14/(2*N)

      DO 50 I=1,N
      K1=W*(COS(X))
      K2=W*(COS(X+K1/2.))
      K3=W*(COS(X+K2/2.))
      K4=W*(COS(X+K3))
      Y=X+(K1-2.*(K2+K3)-K4)/6.
   50 X=X+W

      ERR=Y-1

  100 WRITE(5,11)N,Y,ERR
   11 FORMAT (7X,I3,4X,F10.6,4X,F10.7)

      STOP
      END
```

الشكل (8.8) – المثال (6.8) بلغة الفورتران.

الجدول (6.8) – نتائج المثال (6.8) بلغة الفورتران.

DIVS	SIN X	ERR
1	1.002275	2.274752E-03
2	1.000134	1.339912E-04
4	1.000008	7.987022E-06
8	1.000000	2.384186E-07
16	9.999998E-01	-1.788139E-07
32	9.999998E-01	-2.384186E-07
64	9.999996E-01	-3.576279E-07
128	9.999991E-01	-8.940697E-07
256	9.999977E-01	-2.324581E-06

والشكل (9.8) يوضح برنامجا بلغة C لنفس المثال (6.8)، أما الجدول (7.8) فيعطي نتائج تنفيذ هذا البرنامج.

```
#include<iostream.h>
#include<iomanip.h>
#include<math.h>
#include<conio.h>
void main()
{clrscr();
int i,j,n;
float k1,k2,k3,k4,y,x,w,er;
cout<<"\n\nw\t\t        y\t\t        er\n\n";
for(i=1;i<=7;i++)
{n=pow(2,i-1);x=0.0;
y=0.0;w=1.570796327/n;
for(j=1;j<=n;j++)
{k1=(cos(x))*w;
k2=(cos(x+(w/2)))*w;
k3=(cos(x+(w/2)))*w;
k4=(cos(x+w))*w;
y=y+((k1+(2*k2)+(2*k3)+k4)/6);
er=y-1.0;
x=x+w;}
cout<<setprecision(6)<<setiosflags(ios::showpoint)<
<w<<"\t\t";
cout<<setprecision(6)<<setiosflags(ios::showpoint)<
<y<<"\t\t";
cout<<setprecision(6)<<setiosflags(ios::showpoint)<
<er<<endl;
}
getch();}
```

الشكل (9.8) – المثال (6.8) بلغة C.

الجدول (7.8) –نتائج المثال (6.8) بلغة C.

y	er
1.002280	0.002280
1.000135	0.000135
1.000008	8.344650e-06
1.000001	5.960464e-07
1.000000	-5.960464e-08
1.000000	-1.788139e-07
1.000000	1.192093e-07

مثال (7.8)

أعد حل المثال $\frac{dy}{dx}=-xy$ $\quad x_o=0, y_o=1$ بطريقة رنج-كوتا وطريقة أويلر المعدلة وذلك عند $\bar{x}=1$ ؛قارن بين الطريقتين.

الحل:

نقوم بحل المسألة بطريقتي رنج-كوتا وأويلر المعدلة فنكتب البرنامج بالشكل (10.8) بلغة باسكال لنحصل بعد تنفيذه على النتائج بالجدول (8.8) وحيث نلاحظ تقارب الحل بالطريقتين وأن الخطأ في طريقة رنج -كوتا أقل. والشكـــــــــلان (11.8) و(12.8) يبين تطابق الحل العددي (●) مع الحل التحليلي (ـــ).

```
DECLARE FUNCTION F! (X!, Y!)
CLS
INPUT "HOW MANY INCREAMENT DO YOU NEED?", N%
INPUT "WHAT IS THE STEP SIZE?", W!
INPUT "WHAT IS THE VALUE OF THE FUNCTION AT THE ZERO POINT", Y!
INPUT "WHAT IS THE STARTING POINT OF THE TIME", X!
Y3! = Y!
Y1! = Y!
Y4! = EXP(-X! ^ 2 / 2)
OPEN "GGZ.TXT" FOR OUTPUT AS #2
OPEN "JRZ.TXT" FOR OUTPUT AS #1
PRINT #2, "X", "MEM Y3", "YEXACT Y4, ER3"
PRINT #2, "------  -------    ---------   --------"
FORMAT$ = "##.##      ##.####^^^^   ##.####^^^^ ###.#####^^^^"
PRINT #2, USING FORMAT$; X!; Y3!; Y4!; ER3
PRINT #1, "X", "RK Y1", "YEXACT Y2", "ERROR"
PRINT #1, "------    --------   --------   --------"

FORMATS = "##.##   ##.####^^^^    ##.####^^^^     ##.#####^^^^"
PRINT #1, USING FORMATS; X!; Y1!; Y2!; ER!
PRINT USING FORMAT$; X!; Y1!; Y2!; ER!

FOR I% = 1 TO N%
Y3! = Y3! + W! * .5 * (F(X!, Y3!) + F(X! + W!, Y3! + W! * F(X!, Y3!)))

K1! = W! * F(X!, Y1!)
K2! = W! * F(X! + .5 * W!, Y1! + .5 * K1!)
K3! = W! * F(X! + .5 * W!, Y1! + .5 * K2!)
K4! = W! * F(X! + W!, Y1! + K3!)
Y1! = Y1! + (K1! + 2 * K2! + 2 * K3! + K4!) / 6

X! = X! + W!

Y4! = EXP(-X! ^ 2 / 2)
ER3! = ABS((Y3! - Y4!) / Y4!) * 100
Y2! = EXP(-X! ^ 2 / 2)
ER! = ABS((Y1! - Y2!) / Y2!) * 100

PRINT #2, USING FORMAT$; X!; Y3!; Y4!; ER3!
PRINT #1, USING FORMAT$; X!; Y1!; Y2!; ER!

NEXT I%
END

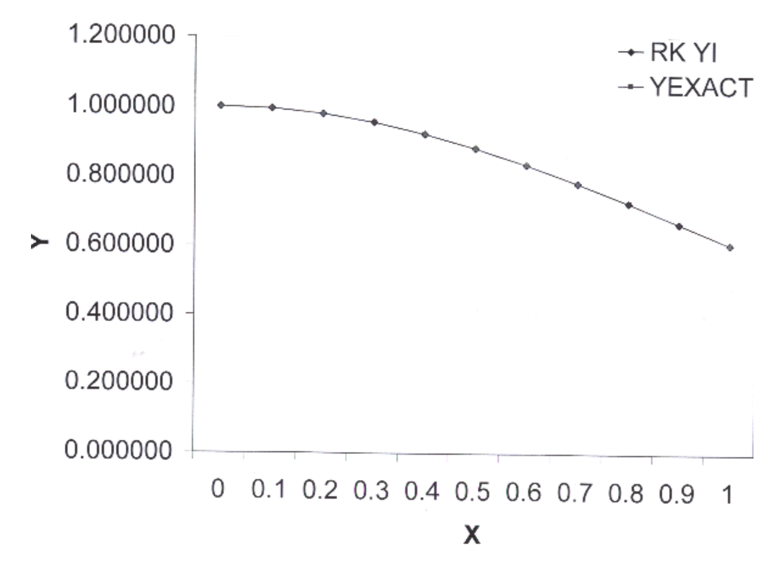
FUNCTION F (X!, Y!)
F = -X! * Y!
END FUNCTION
```

الشكل (10.8) المثال (7.8) بلغة باسكال

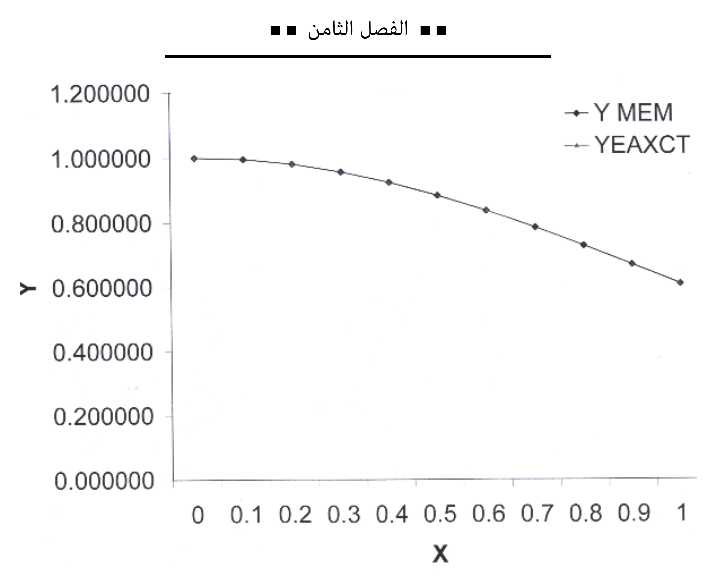
الجدول (8.8) نتائج المثال (7.8) بلغة باسكال

X	RK Y1	YEXACT Y2	ERROR
0.00	1.0000E+00	1.0000E+00	0.00000E+00
0.10	9.9501E-01	9.9501E-01	0.00000E+00
0.20	9.8020E-01	9.8020E-01	0.00000E+00
0.30	9.5600E-01	9.5600E-01	0.00000E+00
0.40	9.2312E-01	9.2312E-01	0.00000E+00
0.50	8.8250E-01	8.8250E-01	0.00000E+00
0.60	8.3527E-01	8.3527E-01	0.00000E+00
0.70	7.8270E-01	7.8270E-01	0.00000E+00
0.80	7.2615E-01	7.2615E-01	0.00000E+00
0.90	6.6698E-01	6.6698E-01	8.93654E-06
1.00	6.0653E-01	6.0653E-01	9.82715E-06

X	MEM Y3	YEXACT Y4	ER3
0.00	1.0000E+00	1.0000E+00	0.00000E+00
0.10	9.9500E-01	9.9501E-01	12.51981E-04
0.20	9.8017E-01	9.8020E-01	24.68835E-04
0.30	9.5596E-01	9.5600E-01	34.85260E-04
0.40	9.2308E-01	9.2312E-01	40.48473E-04
0.50	8.8246E-01	8.8250E-01	37.89045E-04
0.60	8.3525E-01	8.3527E-01	22.26423E-04
0.70	7.8271E-01	7.8270E-01	12.48896E-04
0.80	7.2620E-01	7.2615E-01	73.38239E-04
0.90	6.6709E-01	6.6698E-01	16.89900E-03
1.00	6.0672E-01	6.0653E-01	30.87689E-03

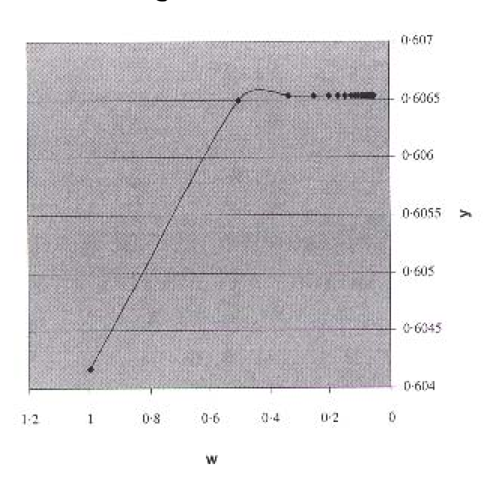


الشكل (11.8) مقارنة مع الحل التحليلي للمثال (7.8) [رنج-كوتا]



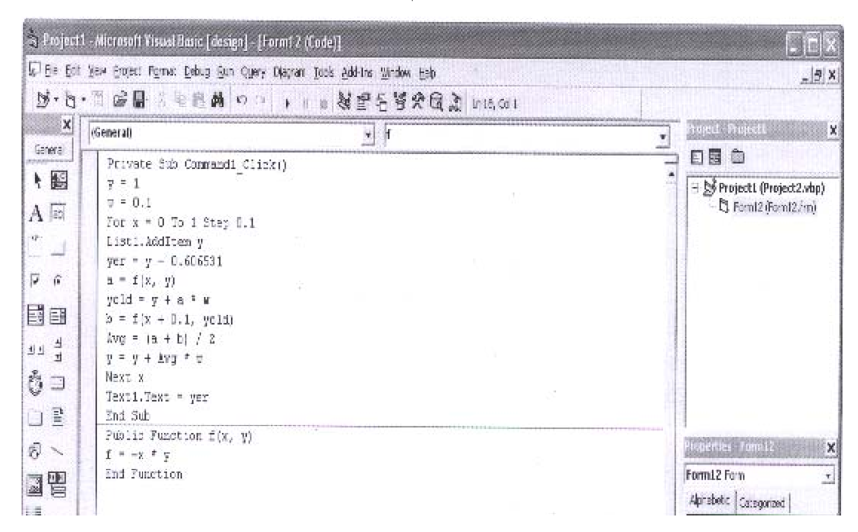
الشكل (12.8) مقارنة مع الحل التحليلي للمثال (7.8) [أويلر المعدلة]

نعطي أيضاً بالشكل (13.8) اعتماد قيمة $y(1)$ على ω، حيث نلاحظ أنه كلما صغرنا في ω كلما كانت القيمة أقرب إلى القيمة المتوقعة و هو أمر واضح.



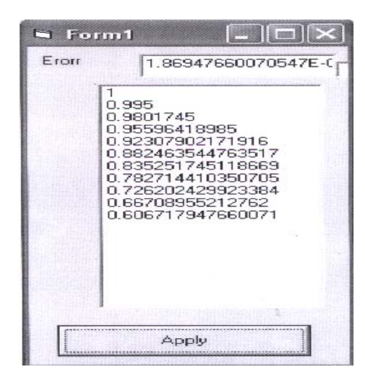
الشكل (13.8) اعتماد y على ω للمثال (7.8) [أويلر المعدلة]

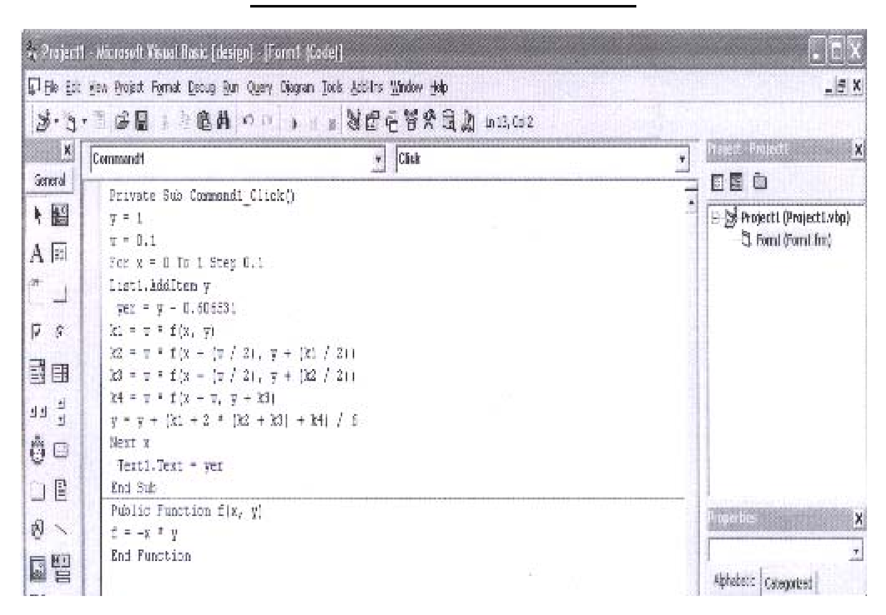
نوضح أيضا في الشكلين (14.8) و (15.8) و الجدولين (9.8) و (10.8) برامج ونتائج المثال (7.8) ولكن بطريقة بيسك المرئية وحيث نصل فيهم إلى نفس النتيجة المتوقعة.



الشكل (14.8) المثال (7.8) بلغة بيسك المرئية (أويلر المعدلة)

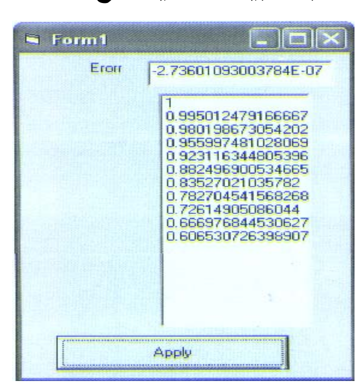
الجدول (9.8) نتائج المثال (7.8) بلغة بيسك المرئية (أويلر المعدلة)





الشكل (15.8) المثال (7.8) بلغة بيسك المرئية (رنج -كوتا)

الجدول (10.8) نتائج المثال (7.8) بلغة بيسك المرئية (رنج-كوتا)



8.8 معادلات تفاضلية من رتب عليا

إن الأسباب التي جعلتنا نعالج معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى يمكن أن تتلخص فيما يلي:

أ) سهولة معالجة مثل هذه المعادلات واعتبارها الخطوة الأولى نحو معالجة بقية المسائل التي تحوي معادلات من الرتب العليا.

ب) شيوع مثل هذه المسائل (بمعادلات من رتبة أولى) في حقول شتى.

ج) إمكانية تحويل المعادلات من الرتب العليا إلى مجموعة من المعادلات من الرتبة الأولى كما سنوضحه فيما بعد.

في كثير من الحالات تواجهنا معادلات تفاضلية من النوع:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + a_1 \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) \qquad \ldots\ldots (21.8)$$

وبحيث تعطي القيم الابتدائية للكميات $y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ عند نقطة ما x_o. أي أن المسألة التي لدينا تشمل معادلة تفاضلية عادية من الرتبة n. ولو استطعنا تحويل هذه المعادلة إلى مجموعة من المعادلات الآنية من الرتبة الأولى؛ فإنه يمكننا الاستفادة مما تمت دراسته حول الحلول العددية للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأول وإيجاد حل المسألة تحت الدراسة.

وهذا ممكن، لو وضعنا المعادلة (21.8) على الصورة:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)},...., y^{(n-1)}\right) \qquad ......\ (22.8)$$

ثم نقوم بالتحويلات التالية:

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y_1^{(1)}\left(= y^{(1)}\right) \\ y_3 &= y_2^{(1)}\left(= y^{(2)}\right) \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1}^{(1)}\left(= y^{(n-1)}\right) \end{aligned}$$

عندئذ نرى أن:

$$y_n^{(1)} = y^{(n)} = f\left(x, y_1, y_2,...., y_n\right) \qquad ......\ (23.8)$$

وهكذا نرى أننا حصلنا على n من المعادلات الآنية من الرتبة الأولى و هي:

$$y_1^{(1)} = y_2\ ,\ y_2^{(1)} = y_3\ ,\ y_{n-1}^{(1)} = y_n$$

و

$$y_n^{(1)} = f\left(x, y_1,...., y_n\right)$$

مثال (8.8)

لو كان لدينا المعادلة:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = y^2$$

فإنه يمكننا تحويل هذه المعادلة من الرتبة الثانية إلى معادلتين من الرتبة الأولى وذلك كما يلي:

نضع $y_1 = y$ و $y_2 = y_1^{(1)}$ ومنها نرى أن:

$$y_2^{(1)} = y_2^2 - y_1$$

وهكذا نوجد الحل عددياً إذا ما أعطينا قيم $y_1(= y)$ و $y_2\left(= \frac{dy}{dx}\right)$ عند نقطة ابتدائية ما.

وعموماً نستطيع تحويل أي معادلة من الرتبة n إلى n من المعادلات التفاضلية الآنية من الشكل :

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2^{(1)} &= f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ &\vdots \\ y_n^{(1)} &= f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{aligned}$$

وهي معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى . بعدئذ نستطيع تطبيق الطرق المختلفة التي سبق وأن تمت دراستها بالبنود السابقة كطريقة رنج - كوتا، ونقوم بالعمليات التكرارية على كل معادلة.

ويمكن توضيح ذلك كما يلي:

لو كانت المعادلتان الآنيتان هما

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= f_1(x, y, z) \\ z^{(1)} &= f_2(x, y, z) \end{aligned}$$

فإن العمليتين التكراريتين ، باستخدام طريقة RKM هما:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

و

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}\left[l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4\right]$$

حيث:

$$k_1 = f_1(x_i, y_i, z_i)\omega$$
$$l_1 = f_2(x_i, y_i, z_i)\omega$$
$$k_2 = f_1\left(x_i + \frac{1}{2}\omega, y_i + \frac{1}{2}k_1, z_i + \frac{1}{2}l_1\right)\omega$$
$$l_2 = f_2\left(x_i + \frac{1}{2}\omega, y_i + \frac{1}{2}k_1, z_i + \frac{1}{2}l_1\right)\omega$$
$$k_3 = f_1\left(x_i + \frac{1}{2}\omega, y_i + \frac{1}{2}k_2, z_i + \frac{1}{2}l_2\right)\omega$$
$$l_3 = f_2\left(x_i + \frac{1}{2}\omega, y_i + \frac{1}{2}k_2, z_i + \frac{1}{2}l_2\right)\omega$$
$$k_4 = f_1(x_i + \omega, y_i + k_3, z_i + l_3)\omega$$
$$l_4 = f_2(x_i + \omega, y_i + k_3, z_i + l_3)\omega$$

في ختام هذا البند نود أن نشير إلى أنه يمكن استخدام متسلسلة تايلور لإيجاد حلول المعادلات الآنية التي حصلنا عليها. نوضح استخدام هذه الطريقة بالمثال الآتي:

مثال (9.8)

أوجد الحل العددي للمعادلين $z^{(1)} = y, y^{(1)} = z$ عند $x = 0.1$ علماً بأن $z_o = 1, y_o = 0$ عند $x_o = 0$.

الحل:

من مفكوك تايلور (أو ماكلورين في هذه الحالة) نرى أن:

$$y = y_o + xy_o^{(1)} + \frac{x^2}{2!} y_o^{(2)} + \frac{x^3}{3!} y_o^{(3)} + ...$$

و

$$z = z_o + xz_o^{(1)} + \frac{x^2}{2!} z_o^{(2)} + \frac{x^3}{3!} z_o^{(3)} + ...$$

ولكي نوجد قيم z, y عند $x = 0.1$ علينا إيجاد قيم المشتقات المختلفة عند $x_o = 0$ ؛ولكن هذه يمكن حسابها كما يلي:

حيث أن:

$$z^{(1)} = y, y^{(1)} = z$$

فإنه، بالتعويض، نجد أن $y_o{}^{(1)} = z_0 = 1$ و $z_o{}^{(1)} = y_o = 0$.

نفاضل الآن المعادلتين الآنيتين لنحصل على:

$$z^{(2)} = y^{(1)} = z \text{ و } y^{(2)} = z^{(1)} = y$$

ومنها نجد أن:

$y_o{}^{(2)} = 0$ و $z_o{}^{(2)} = 1$.

نفاضل مرة أخرى لنحصل على:

$y^{(3)} = z$ و $z^{(3)} = y$ ومنها $y_o{}^{(3)} = 1$ و $z_o{}^{(3)} = 0$.

..... وهكذا.

وبالرجوع إلى مفكوك تايلور نستطيع حساب y و z عند $x = 0.1$ و حيث نرى أن:

$$y = 0 + (0.1)1 + \frac{(0.1)^2}{2!}(0) + \frac{(0.1)^3}{3!}(1) + \ldots\ldots\ldots$$

$$z = 1 + (0.1)(0) + \frac{(0.1)^2}{2!}(1) + \frac{(0.1)^3}{3!}(3) + \ldots\ldots\ldots$$

أو أن :

$$z \cong 1.005, y \cong 0.1002$$

لاحظ أنه باستخدام هذه الطريقة لإيجاد الحل العددي كانت كل مشتقة معتمدة على قيم المشتقات السابقة وبذلك يجب الحذر في حساب المشتقات الدنيا حتى لا نقع في الخطأ الذي سينتثر إذ حدث.

9.8 طريقة الرمي (Shooting Method)

درسنا فيما سبق، وببعض التفصيل، حلول المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى ولقد رأينا أنه لإيجاد الحل الوحيد يتعين علينا معرفة ثابت واحد (هو قيمة y عند نقطة ابتدائية ما). بالمثل لإيجاد حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية علينا معرفة ثابتين وهكذا . . .

في المعتاد تكون هذه الثوابت أو القيم معرفة كما يلي:

1. تكون الدالة أو مشتقتها معطاة عند نقطة البداية وتسمى المسألة بمسألة القيم الابتدائية مثل:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0 \quad ; \quad x(0)=0 \quad , \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_0=0$$

2. تكون الدالة أو مشتقتها معرفة عند نقطتين مختلفتين وعادة ما تكون هذه النقاط حدودية أي عند حدود نطاق المسألة؛ وفي هذه الحالة تسمى المسألة بمسألة القيم الحدية كالمسألة:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0 \qquad 0\le x\le 1$$

و

$$y(0)=0 \quad , \quad y(1)=1$$

والمسائل التي تدخل ضمن هذا النطاق عديدة وبميادين شتى كالفيزياء والهندسة وغيرها مثل تدفق الحرارة والحركة الاهتزازية و مسائل الجهد .

في هذا البند والبند الموالي ندرس الكيفية التي يتم بها استخدام بعض الطرق ،مثل طريقة الرمي وطريقة الحل من خلال مجموعة من المعادلات الآنية، لإيجاد حلول مسائل القيم الحدية بالمعادلات التفاضلية العادية.

لنأخذ المثال التالي:

مثال (10.8)

أوجد الحل العددي لمسألة القيم الحدية:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\left(1-\frac{x}{5}\right)y=x \quad ; \quad y(1)=2 \quad , \quad y(3)=-1$$

وذلك باستخدام طريقة الرمي.

الحل:

لو كان لدينا، بالإضافة قيمة $y^{(1)}(1)$ لاستطعنا اعتبار هذه المسألة مسألة قيم ابتدائية ولعالجناها بالطرق السابقة بعد تحويلها إلى معادلات آنية في y و $y^{(1)}=\frac{dy}{dx}$. ولكن ما هو معلوم لدينا هو قيم y عند $x=1,3$.وعليه لو قمنا بعملية تخمين لقيمة $y^{(1)}$ عند $x=1$ ثم قمنا بالحسابات، لنرى مدى تطابق القيمة المحسوبة لـ $y(3)$ ومع القيمة المعطاة،لتمكنا من الوصول للمنحنى المطلوب بعد بعض عناء.

دعنا نأخذ $y^{(1)}(1)=-1.5$ ؛عندئذ لو قمنا بحل المسألة كمسألة قيم ابتدائية وغضضنا الطرف عن $y(3)$ لحصلنا على $y(3)=4.811$.(لاحظ أننا استعملنا $\Delta x=0.2$) وهي قيمة عالية مقارنة بالقيمة المعطاة $y(3)=-1$. نحاول بقيمة أخرى أقل لـ $y^{(1)}$ مثل $y^{(1)}=-3$. إذا فعلنا ذلك حصلنا على $y(3)=0.453$ ، وهي أيضاً قيمة كبيرة نسبيا ولكنها معقولة.

الآن ولتخمين القيمة السليمة والتي توصلنا للحل نستعمل الاستكمال الخطي، من خلال القيمتين السابقتين، لنحصل على $y(3)=-1$ بالضبط؛ كما نحصل على منحنى الحل الموضح بالجدول (11.8).

الجدول(11.8) الحل العددي للمثال (10.8) باستخدام طريقة الرمي

x	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
y	2.0	1.348	0.787	0.305	-0.104	-0.443	-0.712	-0.908	-1.026	-1.06	-1.0

من خلال هذا المثال يتضح السبب في تسمية الطريقة بطريقة الرمي؛ كما يمكن تبين العلاقة الوطيدة بين ما تم استخدامه في هذه الطريقة وبين ما يستخدم عند رمي القذائف المدفعية. وعموما يمكننا تلخيص الطريقة في الخطوات التالية:

1. لحل مسألة قيم حدية حاول أن تكون مسألة قيم ابتدائية بافتراض شروط كافية.
2. أوجد حل هذه المعادلة الجديدة وقارن القيمة المحسوبة مع الشروط عند الحدود الأخرى.
3. أعد تغيير هذه القيم الابتدائية حتى تحصل على تطابق مع الشروط الحدية كلها.

مثال (11.8)

مستعملاً طريقة الرمي أوجد حل مسألة القيم الحدية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y \quad ; \quad y(1) = 1.1752 \quad y(3) = 10.0179$$

الحل:

بناء على ما تم التقديم له نكتب البرنامج الموضح أسفله بالشكل (16.8) والذي يستعمل $x1$ لـ y و $x2$ لـ $\frac{dy}{dx}(x=T)$ كما يستخدم البرنامج الفرعي SUBROUTINE RKSYST (DERIVS,TO,H,XO,XEND,XWRK,F,N) والذي يحسب حلول مجموعة من المعادلات الآنية من الرتبة الأولى بطريقة رنج-كوتا؛ وهذا بدوره يستعمل البرنامج الفرعي SUBROUTINE DERIVS (X,T,F,N) الذي يحسب المشتقات.

الجدول (12.8) يوضح النتائج المتحصل عليها بإجراء البرنامج المذكور، ومنه نرى

مدى الدقة التي حصلنا عليها باستخدام طريقة الرمي، حيث نلاحظ أن الأخطاء صغيرة جداً عندما نقارن الحل بالحل التحليلي $y = \sinh x$.

```
      DIMENSION XO (2),XEND(2),XWRK(4,2),F(2)
      EXTERNAL DERIVS

      DATA H,N,G1,G2,TOL/.1,2,1.5431,1.,.001/

      DATA TSTART,XSTART,D/1.,1.1752,10.0179/

      XO(1)= XSTART
      TO   =TSTART
      XO(2)=G1

      DO 10 I=1,20
      CALL RKSYST (DERIVS,TO,H,XO,XEND,XWRK,F,N)

      XO(1)=XEND(1)
      XO(2)=XEND(2)
      TO=TO+H

10    CONTINUE

      R1=XO(1)
      TO=TSTART
      XO(1)=XSTART
      XO(2)=G2

      DO 20 I=1,20
      CALL RKSYST(DERIVS,TO,H,XO,XEND,XWRK,F,N)

      XO(1)=XEND(1)
      XO(2)=XEND(2)
      TO=TO+H

20    CONTINUE

      R2=XO(1)

      DO 40 ITER=1,20
      IF (ABS(R2-D).LE.TOL)GOTO 99

      TO    = TSTART
      XO(1)= XSTART

      XO(2)=G1+(G2-G1)/(R2-R1)*(D-R1)
      G1=G2
      G2=XO(2)
      R1=R2

      DO 30 I=1,20
      CALL RKSYST(DERIVS,TO,H,XO,XEND,XWRK,F,N)

      XO(1)=XEND(1)
      XO(2)=XEND(2)
      TO=TO+H

30    CONTINUE
      R2=XO(1)
40    CONTINUE


      GOTO 100
```

```
100 WRITE(*,202)R2,G2

202 FORMAT(1HO'FINAL VALUE AT END OF INTERVAL',2X,F7.4,//,1HO'USING INITIAL SLOP VALUE OF',2
X,F7.4,2X,'LAST COMPUTATIONS WERE',//)

    TO=TSTART
    XO(1)=XSTART
    XO(2)=G2

    WRITE(*,203)TO,XO(1),XO(2),SINH(TO),ERROR
203 FORMAT (1HO,10X,'TIME',9X,'X1 VALUE',5X,'X2 VALUE',5X,'SINH(TIME)',4X,'ERROR',/,1H,9X,F7
.4,6X,F7.4,6X,F7.4,6X,F7.4,6X,F7.4)

    DO 50 I=1,20
    CALL RKSYST(DERIVS,TO,H,XO,XEND,XWRK,F,N)

    XO(1)=XEND(1)
    XO(2)=XEND(2)
    TO=TO+H
    S=SINH(TO)
    ERROR=S-XO(1)

    WRITE(*,204)TO,XO(1),XO(2),SINH (TO),ERROR
204 FORMAT (1H,9X,F7.4,6X,F7.4,6X,F7.4,6X,F7.4,6X,F7.4)
50  CONTINUE
    STOP
    END

    SUBROUTINE RKSYST(DERIVS,TO,H,XO,XEND,XWRK,F,N)

    DIMENSION XO(N),XEND(N),XWRK(4,N),F(N)
    CALL DERIVS(XO,TO,F,N)
    DO 10 I=1,N
    XWRK(1,I)=H*F(I)
    XEND(I)=XO(I)+XWRK(1,I)/2.
10 CONTINUE

    CALL DERIVS(XEND,TO+H/2.,F,N)
    DO 20 I=1,N
    XWRK(2,I)=H*F(I)
    XEND(I)=XO(I)+XWRK(2,I)/2.
20  CONTINUE
    CALL DERIVS(XEND,TO+H/2.,F,N)
    DO 30 I=1,N
    XWRK(3,I)=H*F(I)
    XEND(I)=XO(I)+XWRK(3,I)
30  CONTINUE
    CALL DERIVS(XEND,TO+H,F,N)
    DO 40 I=1,N
    XWRK(4,I)=H*F(I)
40 CONTINUE

    DO 50 I=1,N

   XEND(I)=XO(I)+(XWRK(1,I)+2.*XWRK(2,I)+2.*XWRK(3,I)+XWRK(4,I))/6.

50  CONTINUE
    RETURN
    END

    SUBROUTINE DERIVS(X,TO,F,N)
    DIMENSION X(N),F(N)
    F(1)=X(2)
    F(2)=X(1)
    RETURN
    END
```

الشكل (16.8) حل المثال (11.8) باستخدام طريقة الرمي.

الجدول (12.8) نتائج المثال (11.8) باستخدام طريقة الرمي.

```
TOLERENCE CRITERION MET IN 2 ITERATIONS
FINAL VALUE AT END OF INTERVAL 10.0179

USING INITIAL SLOP VALUE OF   1.5431  LAST COMPUTATIONS WERE
```

TIME	X1 VALUE	X2 VALUE	SINH(TIME)	ERROR
1.0000	1.1752	1.5431	1.1752	.0000
1.1000	1.3356	1.6685	1.3356	.0000
1.2000	1.5095	1.8107	1.5095	.0000
1.3000	1.6984	1.9709	1.6984	.0000
1.4000	1.9043	2.1509	1.9043	.0000
1.5000	2.1293	2.3524	2.1293	.0000
1.6000	2.3756	2.5775	2.3756	.0000
1.7000	2.6456	2.8283	2.6456	.0000
1.8000	2.9422	3.1075	2.9422	.0000
1.9000	3.2682	3.4177	3.2682	.0000
2.0000	3.6269	3.7622	3.6269	.0000
2.1000	4.0219	4.1443	4.0219	.0000
2.2000	4.4571	4.5679	4.4571	.0000
2.3000	4.9370	5.0372	4.9370	.0000
2.4000	5.4662	5.5570	5.4662	.0000
2.5000	6.0502	6.1323	6.0502	.0000
2.6000	6.6947	6.7690	6.6947	.0000
2.7000	7.4063	7.4735	7.4063	.0000
2.8000	8.1919	8.2528	8.1919	.0000
2.9000	9.0596	9.1146	9.0596	.0000
3.0000	10.0179	10.0677	10.0179	.0000

Stop - Program terminated.

في الشكل(17.8) نعطي برنامجا حاسوبيا بلغة C لنفس المثال (11.8)

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
void rksyst();
void derivs(float x[]);
float xo[2],xend[2],xwrk[4][2],f[2], h;
int n ;
double to;

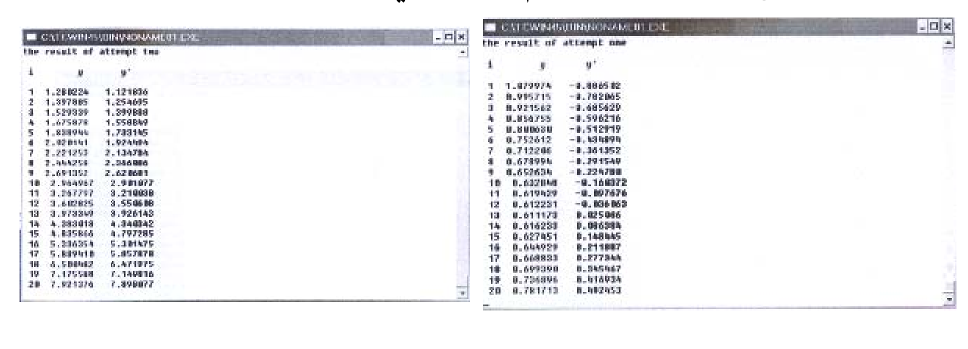
void main(){
double s;
float g1,g2,tstart,xstart,d,r1,r2,error;
int i,j;
clrscr();
h=0.1;  n=2; g1=-1;  g2=1;
tstart=1.0;  xstart=1.1752;  d=10.0179;
//************************
 //* WE SUPPOS  TO FIND Y *//
//************************
xo[0]=xstart;
to=tstart;
xo[1]=g1;
printf("\nthe result of attempt one\n\n");
printf(" i         y        y'\n\n");
for(i=1;i<=20;i++)
{
rksyst();
xo[0]=xend[0];
xo[1]=xend[1];
to=to+h;
printf(" %d  %f   %f\n",i,xo[0],xo[1]);
}
getch();
clrscr();
//**************************************
 //* WE SUPPOS ANATHER VALUE TO FIND Y *//
//**************************************
r1=xo[0];
to=tstart;
xo[0]=xstart;
xo[1]=g2 ;
printf("\nthe result of attempt two\n\n");
printf(" i         y        y'\n\n");
for(i=1;i<=20;i++)
{
rksyst();
xo[0]=xend[0];
xo[1]=xend[1];
to=to+h;
printf(" %d  %f   %f\n",i,xo[0],xo[1]);
}
getch();
clrscr();
//******************
 //* LINEAR CREATION *//
//******************
r2=xo[0];
 printf("\nthe result of LINEAR CREATION\n\n");
printf(" i         y        y'\n\n");
for(j=1;j<=20;j++)
{
 if(fabs(r2-d)<=0.001) goto  one;
 to=tstart;
 xo[0]=xstart;
 xo[1]=g1+(g2-g1)/(r2-r1)*(d-r1);
 g1=g2;
 g2=xo[1];
```

```
  r1=r2;
   for(i=1;i<=20;i++)
          {
          rksyst();
          xo[0]=xend[0];
          xo[1]=xend[1];
          to=to+h;
 printf(" %d  %f   %f\n",i,xo[0],xo[1]);
 }
 getch();
 clrscr();
 r2=xo[0];
 }
 one:
 to=tstart;
 xo[0]=xstart;
 xo[1]=g2;
 printf("\n the result of shooting method comper with sinch function \n\n");
 printf(" x          y           y'         s       error\n\n");
   for(i=1;i<=20;i++)
          {
          rksyst();
          xo[0]=xend[0];
          xo[1]=xend[1];
          to=to+h;
          s=sinh(to);
          error=s-xo[0];
          printf(" %f   %f   %f   %f   %f\n",to,xo[0],xo[1],s,error);
          }
 getch();
 }
 //******************
  //* RK APPLICATION *//
 //******************
 void rksyst()
 {  int i;
   derivs(xo);
   for(i=0;i<n;i++)
   {
    xwrk[0][i]=h*f[i];
    xend[i]=xo[i]+xwrk[0][i]/2;
   }

  derivs(xend);
  for(i=0;i<n;i++)
  {
   xwrk[1][i]=h*f[i];
   xend[i]=xo[i]+xwrk[1][i]/2;
  }
  derivs(xend);
  for(i=0;i<n;i++)
  {
   xwrk[2][i]=h*f[i];
   xend[i]=xo[i]+xwrk[2][i]/2;
  }
   derivs(xend);
  for(i=0;i<n;i++)
  {
   xwrk[3][i]=h*f[i];
    }
 for(i=0;i<n;i++)
   xend[i]=xo[i]+(xwrk[0][i]+2*xwrk[1][i]+2*xwrk[2][i]+xwrk[3][i])/6;
 }
 //******************
void derivs(float x[])
{
  f[0]=x[1];
  f[1]=x[0];
}
```

الشكل(17.8)- المثال(11.8) بلغة C

الجدول (13.8) نتائج المثال (11.8) باستخدام طريقة الرمي بلغة C.



C:\TCWIN45\BIN\NONAME01.EXE

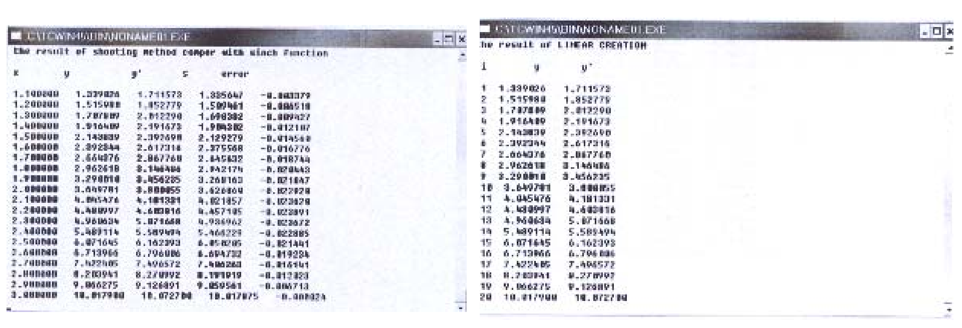
the result of attempt one

i	y	y'
1	1.079974	-0.886582
2	0.995715	-0.782065
3	0.921562	-0.685629
4	0.856755	-0.596216
5	0.800630	-0.512919
6	0.752612	-0.434899
7	0.712206	-0.361352
8	0.678996	-0.291549
9	0.652634	-0.224700
10	0.632040	-0.160372
11	0.619429	-0.097676
12	0.612231	-0.036063
13	0.611173	0.025066
14	0.616233	0.086304
15	0.627451	0.148445
16	0.644929	0.211007
17	0.668833	0.277344
18	0.699390	0.345467
19	0.736096	0.416934
20	0.781713	0.492453

C:\TCWIN45\BIN\NONAME01.EXE

the result of attempt two

i	y	y'
1	1.280224	1.121036
2	1.397805	1.254695
3	1.529339	1.399888
4	1.675878	1.558849
5	1.838944	1.733145
6	2.020541	1.924904
7	2.221253	2.134784
8	2.444258	2.366006
9	2.691352	2.620681
10	2.964967	2.901077
11	3.267797	3.210038
12	3.602025	3.550608
13	3.973849	3.926143
14	4.383018	4.340042
15	4.835866	4.797285
16	5.336354	5.301475
17	5.889418	5.857878
18	6.500482	6.471075
19	7.175580	7.149816
20	7.921376	7.890077



C:\TCWIN45\BIN\NONAME01.EXE

the result of LINEAR CREATION

i	y	y'
1	1.339026	1.711573
2	1.515980	1.852779
3	1.707809	2.012290
4	1.916409	2.191673
5	2.143839	2.392690
6	2.392344	2.617316
7	2.664076	2.867760
8	2.962618	3.146486
9	3.290010	3.456235
10	3.649701	3.800055
11	4.045476	4.181331
12	4.480997	4.603016
13	4.960634	5.071660
14	5.489114	5.589494
15	6.071645	6.162393
16	6.713966	6.796086
17	7.422605	7.496572
18	8.203941	8.270992
19	9.066275	9.126891
20	10.017900	10.072700

C:\TCWIN45\BIN\NONAME01.EXE

the result of shooting method comper with sinch function

x	y	y'	s	error
1.100000	1.339026	1.711573	1.335647	-0.003379
1.200000	1.515980	1.852779	1.509461	-0.006518
1.300000	1.707809	2.012290	1.698382	-0.009427
1.400000	1.916409	2.191673	1.904302	-0.012107
1.500000	2.143839	2.392690	2.129279	-0.014560
1.600000	2.392344	2.617316	2.375568	-0.016776
1.700000	2.664076	2.867760	2.645632	-0.018744
1.800000	2.962618	3.146486	2.942174	-0.020443
1.900000	3.290010	3.456235	3.268163	-0.021847
2.000000	3.649701	3.800055	3.626869	-0.022828
2.100000	4.045476	4.181331	4.021857	-0.023620
2.200000	4.480997	4.603016	4.457105	-0.023891
2.300000	4.960634	5.071660	4.936962	-0.023672
2.400000	5.489114	5.589494	5.466229	-0.022885
2.500000	6.071645	6.162393	6.050205	-0.021441
2.600000	6.713966	6.796086	6.694732	-0.019234
2.700000	7.422605	7.496572	7.406444	-0.016161
2.800000	8.203941	8.270992	8.191919	-0.012023
2.900000	9.066275	9.126891	9.059561	-0.006713
3.000000	10.017900	10.072700	10.017875	-0.000024

كما نعطي في الشكل(18.8) برنامجا حاسوبيا بلغة بيئة التطوير(دلفي) لنفـــــس المثال(11.8).و نتائج تنفيذ هذا البرنامج معطاة بالجدول (14.8)

```
procedure Shooting_Method;
var
  XXO, XEnd, F : TTwo;
  XWrk : TFourTwo;
  Iter, i, N : integer;
  R1,R2,RErro,S,H,TTO,G1,G2,Tol,TStart,XStart,D : real;
  Label L100;
  Label L99;
begin
  H := 0.1; N := 2; G1 := -1.0; G2 := 1.0; Tol := 0.001;
  TStart := 1.0; XStart := 1.1752; D := 10.0179;
  XXO[1] := XStart;
  TTO := TStart;
  XXO[2] := G1;

  for i := 1 to 20 do
  begin
    RKSyst(TTO, H, XXO, XEnd,  F, XWrk, N);

    XXO[1] := XEnd[1];
    XXO[2] := XEnd[2];
    TTO := TTO + H;
  end;

    R1 := XXO[1];
    TTO := TStart;
    XXO[1] := XStart;
    XXO[2] := G2;

  for i := 1 to 20 do
  begin

      RKSyst(TTO, H, XXO, XEnd,  F, XWrk, N);
      XXO[1] := XEnd[1];
      XXO[2] := XEnd[2];
      TTO := TTO + H;
    end;

    R2 := XXO[1];

    for Iter := 1 to 20 do
    begin
   //...........................
      if Abs(R2-D) < Tol then goto L99;
      TTO := TStart;
      XXO[1] := XStart;
      XXO[2] := G1 + (G2-G1) / (R2-R1) * (D-R1);
      G1 := G2;
      G2 := XXO[2];
      R1 := R2;
   //...........................
      for i := 1 to 20 do
      begin
```

```
        RKSyst(TTO, H, XXO, XEnd,  F, XWrk, N);
        XXO[1] := XEnd[1];
        XXO[2] := XEnd[2];
        TTO := TTO + H;
      end;  //for i
      R2 := XXO[1];
    end;  //for Iter

    memo1.Lines.Add('We did not meet tolerance criteriion in
  20 iterations. Final value at end interval was');

    goto L100;

    L99:
    memo1.Lines.add('Tolerence criterion met in ' +
  inttostr(Iter) + ' iterations ');
    L100:
    memo1.Lines.add('Final Value at end of interval was ' +
  floattostr(R2) );
    memo1.Lines.add('Using initial slope value of ' +
  floattostr(G2) + ' last computaions ' );

    TTO := TStart;
    XXO[1] := XStart;
    XXO[2] := G2;

    S := Sinh(TTO);
    RErro := S - XXO[1];


  memo1.Lines.add(floattostr(TTO) + ' ' +
floattostr(XXO[1]) + '   ' + floattostr(XXO[2]) + '   ' +
floattostr(S) + ' ' + floattostr(RErro) );
  for i := 1 to 20 do
  begin
      RKSyst(TTO, H, XXO, XEnd,  F, XWrk, N);
      XXO[1] := XEnd[1];
      XXO[2] := XEnd[2];
      TTO := TTO + H;
      S := Sinh(TTO);
      RErro := S - XXO[1];
      memo1.Lines.add(floattostr(TTO) +  '   ' +
floattostr(XXO[1]) + '     ' + floattostr(XXO[2]) + '
' + floattostr(S) + '        ' + floattostr(RErro) );
  end;


end;

procedure RKSyst(TTO, H : real; var XXO, XEnd, F : TTwo;
var XWrk : TFourTwo; N : integer);
var
  i, j : integer;
begin
```

```
    Derivs(XXO, TTO, F , N);
    for i := 1 to N do
    begin
      XWrk[1,i] := H * F[i];
      XEnd[i] := XXO[i] + XWrk[1,i] / 2;
    end;

    Derivs(XEnd, TTO + H/2, F , N);
    for i := 1 to N do
    begin
      XWrk[2,i] := H * F[i];
      XEnd[i] := XXO[i] + XWrk[2,i] / 2;
    end;

    Derivs(XEnd, TTO + H/2, F , N);
    for i := 1 to N do
    begin
      XWrk[3,i] := H * F[i];
      XEnd[i] := XXO[i] + XWrk[3,i] / 2;
    end;

    Derivs(XEnd, TTO + H, F , N);
    for i := 1 to N do
    begin
      XWrk[4,i] := H * F[i];
    end;

  for i := 1 to N do
  begin
    XEnd[i] := XXO[i] + (XWrk[1,i] + 2.0 * XWrk[2,i] + 2.0
* XWrk[3,i] + XWrk[4,i])/6
  end;

end;

procedure Derivs(var X : TTwo; T : real; Var F : TTwo;   N
: integer);
begin
  F[1] := X[2];
  F[2] := X[1];
end;
```

الشكل(18.8) - المثال(11.8) بلغة دلفي

الجدول (14.8) نتائج المثال (11.8) باستخدام طريقة الرمي بلغة دلفي.

Tolerence criterion met in 2 iterations

Final Value at end of interval was 10.0179

Using initial slope value of 1.58728941708334 last computaions

Time	X1 Value	X2 Value	Sinh(Time)	RError
1.0	1.1752	1.58728941708334	1.1752011936438	1.193643801356E-6
1.1	1.33902646788547	1.7115733298408	1.33564747012418	-0.00337899776129236
1.2	1.51597981412378	1.85277847625661	1.50946135541217	-0.0065184587116045
1.3	1.7078089999091	2.01226972541865	1.69838243729262	-0.00942656261648267
1.4	1.91640893743501	2.19167283432739	1.90430150145153	-0.0121074359834776
1.5	2.14383920972997	2.39268981531617	2.12927945509482	-0.0145597546351555
1.6	2.39234440719407	2.61731624185798	2.37556795320023	-0.0167764539938364
1.7	2.66437628165759	2.86776066271153	2.64563193383723	-0.0187443478203537
1.8	2.96261793663574	3.14648631517518	2.94217428809568	-0.020443648540058
1.9	3.29001029246601	3.45623535090722	3.26816291152832	-0.021847380937686
2.0	3.64978108738231	3.80005581255947	3.62686040784702	-0.0229206795352863
2.1	4.04547670052285	4.18133162660223	4.02185674215734	-0.0236199583655123
2.2	4.4809971106317	4.60381590746048	4.4571051705359	-0.0238919400958046
2.3	4.96063433507113	5.07166790072671	4.93696180554596	-0.0236725295251654
2.4	5.48911472801572	5.58949392908686	5.4662292136761	-0.0228855143396167
2.5	6.07164555468796	6.16239274404631	6.0502044810398	-0.0214410736481607
2.6	6.7139663005917	6.79600572996119	6.69473222839369	-0.0192340721980102
2.7	7.42240522131965	7.49657245469471	7.40626310606855	-0.0161421152530998
2.8	8.20394169011234	8.27099211389985	8.19191835423593	-0.0120233358764086
2.9	9.06627495743722	9.12689147399716	9.05956107469334	-0.0067138827438797
3.0	10.0179	10.0726999829429	10.0178749274099	-2.50725900770021E-5

أخيرا نعطي برنامجا حاسوبيا لنفس المثال بلغة بيسك و ذلك بالشكل(19.8)؛أما النتائج فهي معطاة بالجدول(15.8).

```
DECLARE FUNCTION R! (X!)
DECLARE FUNCTION Q! (X!)
DECLARE FUNCTION P! (X!)
DIM Y1(200), Y2(200), Y(200), ER(200)

CLS
SCREEN 12
OPEN "GAM.TXT" FOR OUTPUT AS #2
W = .1
B = 3
A = 1
N = 20
BETA = 10.0179
Y1(1) = 1.1752
Y11 = 0
Y2(1) = 0
Y22 = 1
X = A
FOR I = 2 TO N + 1
K11 = W * Y11
K12 = W * (P(X) * Y11 + Q(X) * Y1(I - 1) + R(X))
K13 = W * Y22
K14 = W * (P(X) * Y22 + Q(X) * Y2(I - 1))

K21 = W * (Y11 + .5 * K12)
K22 = W * (P(X + .5 * W) * (Y11 + .5 * K12) + Q(X + .5 * W) * (Y1(I - 1) + .5 *
K11) + R(X + .5 * W))
K23 = W * (Y22 + .5 * K14)
K24 = W * (P(X + .5 * W) * (Y22 + .5 * K14) + Q(X + .5 * W) * (Y2(I - 1) + .5 *
K13))

K31 = W * (Y11 + .5 * K22)
K32 = W * (P(X + .5 * W) * (Y11 + .5 * K22) + Q(X + .5 * W) * (Y1(I - 1) + .5 *
K21) + R(X + .5 * W))
K33 = W * (Y22 + .5 * K24)
K34 = W * (P(X + .5 * W) * (Y22 + .5 * K24) + Q(X + .5 * W) * (Y2(I - 1) + .5 *
K23))

K41 = W * (Y11 + K32)
K42 = W * (P(X + W) * (Y11 + K32) + Q(X + W) * (Y1(I - 1) + K31) + R(X + W))
K43 = W * (Y22 + K34)
K44 = W * (P(X + W) * (Y22 + K34) + Q(X + W) * (Y2(I - 1) + K33))
```

```
Y1(I) = Y1(I - 1) + (K11 + 2 * K21 + 2 * K31 + K41) / 6
Y11 = Y11 + (K12 + 2 * K22 + 2 * K32 + K42) / 6
Y2(I) = Y2(I - 1) + (K13 + 2 * K23 + 2 * K33 + K43) / 6
Y22 = Y22 + (K14 + 2 * K24 + 2 * K34 + K44) / 6



X = A + (I - 1) * W
NEXT I

C = (BETA - Y1(N + 1)) / Y2(N - 1)
X = A
FOR I = 2 TO N + 1
X = A + (I - 1) * W
Y(I) = Y1(I) + C * Y2(I)
NEXT I
X = A

C = (BETA - Y1(N + 1)) / Y2(N - 1)
Y(I) = Y1(1) + C * Y2(1)
YEX = 1 / 2 * (EXP(X) - EXP(-X))
ER(I) = ABS((Y(I) - YEX) / YEX) * 100
PRINT #2, "    X          Y(I)          YEXACT      ERROR"
PRINT #2, "------      -------       -------     ---------"
PRINT ,
PRINT #2, USING "##.##   ##.#########   ##.#########  #.######^^^^"; X; Y(I);
YEX; ER(I)

FOR I = 2 TO N + 1



X = A + (I - 1) * W
YEX = 1 / 2 * (EXP(X) - EXP(-X))
ER(I) = ABS((Y(I) - YEX) / YEX) * 100
PRINT #2, USING "##.##   ##.#########   ##.#########  #.#######^^^^"; X; Y(I);
YEX; ER(I)
PRINT USING "##.##   ##.#########   ##.#########  #.#######^^^^"; X; Y(I); YEX;
ER(I)
NEXT I
END

FUNCTION P (X)
P = 0
END FUNCTION

FUNCTION Q (X)
Q = 1
END FUNCTION

FUNCTION R (X)
R = 0
END FUNCTION
```

الشكل(19.8) - المثال(11.8) بلغة بيسك

الجدول (15.8) نتائج المثال (11.8) باستخدام طريقة الرمي بلغة بيسك.

X	Y(I)	YEXACT	ERROR
1.00	1.175199986	1.175201178	0.101437E-03
1.10	1.335647464	1.335647464	0.0000000E+00
1.20	1.509462357	1.509461403	0.6317977E-04
1.30	1.698384523	1.698382378	0.1263418E-03
1.40	1.904304624	1.904301405	0.1690200E-03
1.50	2.129283667	2.129279375	0.2015487E-03
1.60	2.375573158	2.375567913	0.2207981E-03
1.70	2.645638227	2.645632029	0.2343063E-03
1.80	2.942181826	2.942174196	0.2593115E-03
1.90	3.268171549	3.268162727	0.2699219E-03
2.00	3.626870155	3.626860380	0.2695213E-03
2.10	4.021867752	4.021856308	0.2845475E-03
2.20	4.457117558	4.457105160	0.2781574E-03
2.30	4.936975479	4.936961651	0.2800969E-03
2.40	5.466244698	5.466229916	0.2704232E-03
2.50	6.050221443	6.050204277	0.2837282E-03
2.60	6.694750786	6.694731712	0.2849029E-03
2.70	7.406282902	7.406263351	0.2639701E-03
2.80	8.191940308	8.191918373	0.2677579E-03
2.90	9.059584618	9.059561729	0.2526412E-03
3.00	10.017900467	10.017874718	0.2570326E-03

10.8 طريقة الفروق المحدودة (Finite Difference Method)

كما نعلم، يمكن كتابة مشتقة دالة بدلالة الفروق المحدودة وبذلك يمكننا التعويض عن المشتقة بهذه الفروق ونحصل على معادلة فرقية **Difference Equation** بدلاً من معادلة تفاضلية؛ وحلول هذه المعادلة الفرقية هي الحلول التقريبية للمعادلة المطلوبة.

وهذه الطريقة أفضل من الطريقة السابقة في كثير من الأحيان. لنعتبر نفس المثال السابق (10.8) ولنأخذ نفس المسألة :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(1 - \frac{x}{5}\right)y = x \quad ; \quad y(1) = 2 \quad , \quad y(3) = -1$$

ولنعمل بالفروق المركزية حيث إنها أدق من الأمامية والخلفية وعليه نعوض عن $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ بالمعادلتين:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_i} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

و h هي قيمة الخطوة الثابتة بين قيم x. لو عوضنا في المعادلة المعطاة لحصلنا على:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \left(1 - \frac{x_i}{5}\right)y_i = x_i$$

أو أن:

$$y_{i-1} - \left[2 + h^2\left(1 - \frac{x_i}{5}\right)\right]y_i + y_{i+1} = h^2 x_i$$

وحيث قمنا بوضع $y = y_i$ و $x = x_i$. وهكذا فنحن الآن أمام مشكلة حل هذه المعادلة الفرقية في الفترة $x \in [1,3]$.

نقسم الفترة إلى عدد من الفترات الفرعية، مثلاً نأخذ $h = \Delta x = 0.5$ فتكون بذلك قيم x هي:

$$x_1 = 1, x_2 = 1.5, x_3 = 2, x_4 = 2.5, x_5 = 3$$

ونكتب كل معادلة مناظرة لـ x_i على حدة وذلك كما يلي:

لـ $x = x_2 = 1.5$

$$y_1 - \left[2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1.5}{5}\right)\right]y_2 + y_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(1.5)$$

لـ $x = x_3 = 2$

$$y_2 - \left[2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{2.0}{5}\right)\right]y_3 + y_4 = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)(2)$$

لـ $x = x_4 = 2.5$

$$y_3 - \left[2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{2.5}{5}\right)\right]y_4 + y_5 = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)(2.5)$$

وحيث أن $y_1 = 2$ و $y_5 = -1$ فإنه بالتعويض نحصل على:

$$\begin{pmatrix} -2.175 & 1 & 0 \\ 1 & -2.150 & 1 \\ 0 & 1 & -2.125 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.625 \\ 0.5 \\ 1.625 \end{pmatrix}$$

وبحل هذه المعادلات نجد أن: $y_2 = 0.552\ ,\ y_3 = -0.424\ ,\ y_4 = -0.964$

ولو قارنا بحلول الطريقة الأولى (الرمي) فإننا نلاحظ أنه بالرغم من بساطة التجزئة (خمس نقاط) إلا أن الحلول كانت معقولة. وهذا يعني بالطبع أن اختيار قيمة h له دور كبير في الحصول على تقريب دقيق. وعليه لو اخترنا $h = 0.2$ وقمنا بإجراء نفس الخطوات المذكورة أعلاه وحسبنا القيم المختلفة لـ y فإننا نحصل على النتائج الموضحة بالجدول (13.8) والذي يوضح أيضاً مقارنة بين هذه الطريقة وطريقة الرمي.

وهكذا نلاحظ أن اختيار $h = \Delta x = 0.2$ أضفى دقة أكثر. نلاحظ أيضاً أن مقدار الخطأ يتناسب مع h^2 وذلك من خلال الطريقة المستخدمة.

الجدول(16.8) قيم y (المثال (10.8)) باستخدام طريقة الفروق المحدودة وطريقة الرمي

x	y (الفروق المحدودة)	y (الرمي)
1.0	2.0	2.0
1.2	1.351	1.348
1.4	0.792	0.787
1.6	0.311	0.305
1.8	-0.097	-0.104
2.0	-0.436	-0.443
2.2	-0.705	-0.712
2.4	-0.903	-0.908
2.6	-1.022	-1.026
2.8	-1.058	-1.060
3.0	-1.000	-1.000

في ختام هذا البند نلخص خطوات طريقة الفروق المحدودة فيما يلي:

1. لإيجاد حل مسألة قيم حدية، نستبدل المعادلة بمعادلة فرقية وذلك بالتعويض عن المشتقات بدلالة الفروق المركزية.
2. نجزئ الفترة إلى فترات فرعية مناسبة متساوية ونكتب المعادلة الفرقية عند كل نقطة حيث الدالة غير معروفة.
3. نوجد حل المعادلات الآنية الناتجة.

تمارين (8)

1. قارن بين طريقة أويلر وامتدادها والأكثر امتداداً.
2. ما هي الفروق الأساسية بين طريقة أويلر وطريقة (ملن) وطريقة رنج-كوتا؟
3. ما هي الطرق المستعملة في حل مسائل القيم الابتدائية وفي حل مسائل القيم الحدية؟
4. باستخدام طريقة أويلر وأويلر المعدلة وطريقة رنج -كوتا أوجد حل المسائل التالية:

أ) $\frac{dy}{dx} = \cos x \quad F(0) = 0, \quad F\left(\pi/2\right) = ?$.

ب) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad F(-1) = -1, \quad F(1) = ?$.

قارن أجوبة الطرق المختلفة و ناقش.

5. أوجد حل مسألة القيم الابتدائية:

$$\frac{dy}{dx} = -xy; \quad x_o = 0, \quad y_o = 1.$$

وذلك عند $\bar{x} = 2$. خذ $\omega = 0.1$ (قارن بقيم $e^{-x^2/2}$)

6. في دائرة كهربية إذا كانت العلاقة بين الجهد V والتيار I والزمن t معطاة بالمعادلتين:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L}V \quad , \quad \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{c}I$$

حيث c, L ثوابت تخص الدائرة المعنية؛ وإذا كان $I(0) = I_o$ و $V(0) = V_o$.

فأوصف كيفية استخدام الطرق العددية المختلفة التي تم التطرق إليها في هذا الفصل لإيجاد I, V عند أي لحظة زمنية $t > 0$.

7. من قانون نيوتن للتبريد يكون معدل تبريد مادة بهواء متحرك يساوي نصف الفرق بين درجة حرارة المادة وتلك للهواء. و إذا كانت درجة حرارة الهواء هي $300^o K$ وأنه عند اللحظة $t = 0$ كانت درجة حرارة المادة $370^o K$ فأحسب متى تكون درجة الحرارة مساوية لـ $310^o K$.

8. إذا علم بأن معدل الزيادة في سكان بلد ما يتناسب مع عدد السكان (وحيث ثابت التناسب k يساوي 0.01) وأن عدد السكان تضاعف في 50 سنة. فأحسب متى يصبح عدد السكان ثلاثة أمثال السكان الأصليين.

9. احسب قيمة y، عند $x = 4$، التي تحقق مسألة القيم الابتدائية التالية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y \quad , \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_o = -1 \quad , \quad y(0) = 1$$

(قارن إجابتك بالقيمة e^{-4}).

10. باستخدام طريقة الرمي وطريقة الفروق المحدودة، أوجد حل مسألة القيم الحدية التالية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y\left(\pi/2\right) = 1$$

أوجد الحل التحليلي وقارن(استعمل قيمة مناسبة لـ h).

الفصل التاسع

الحلول العددية للمعادلات
التفاضلية الجزئية

يحتوي هذا الفصل على:

1.9 مقدمة

يقع العديد من المسائل في الفيزياء والهندسة ومجالات عدة داخل نطاق هذا الفصل فعلى سبيل المثال نرى أن مسائل تدفق الحرارة والمعادلة الموجية وغيرها يؤول حلها إلى حل معادلات تفاضلية جزئية؛ وعليه وجب أن نولي اهتماما للحلول العددية لهذه المعادلات.

بعض الأمثلة على المعادلات التفاضلية الآتي:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ أو $\nabla^2 u = 0$ وهي معادلة لابلاس. أو $\nabla^2 u \neq 0$ وهي معادلة بواسون.

ومثال أخر:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad , \quad 0\le x\le k \quad , \quad t\ge 0$$

بالشروط:

$$y(0,t)=0 \quad , \quad \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x=\ell}=c$$

$$y(x,0)=0 \quad , \quad \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{0}=0$$

وعموما تكون المعادلة:

$$A\,u_{xx}+B\,u_{xy}+C\,u_{yy}+D\,u_x+E\,u_y+F\,u=g(x,y)$$

معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية وتمثل:

معادلة ناقصية (Elliptic) إذا كان $B^2-4AC<0$

معادلة مكافئية (Parabolic) إذا كان $B^2 - 4AC = 0$

معادلة زائدية (Hyperbolic) إذا كان $B^2 - 4AC > 0$

وإذا كان B, A و C دوال في x و y أو u فإن هذه المعادلة يمكن أن تتغير من قسم لآخر عند نقاط عدة في نطاقها. لاحظ أننا أوردنا أمثلة نطاقها في المستوى xy.

لنرجع الآن إلى معادلة لابلاس حيث $B = 0$ و $A = C = 1$ وهي ناقصية ونحاول دراستها في البداية كإحدى النماذج لهذا النوع.

2.9 تمثيل المعادلة التفاضلية بمعادلة فرقية

في مثل هذه الحالات يكون النطاق عبارة عن منطقة في المستوى xy كما بالشكل (1.9). الآن لو كان $\Delta x = h$ فإنه من خلال مفكوك متسلسلة تايلور نجد أن:

$$f(x_n + h) = f(x_n) + f'(x_n)h + \frac{f''(x_n)h^2}{2!} + ...$$

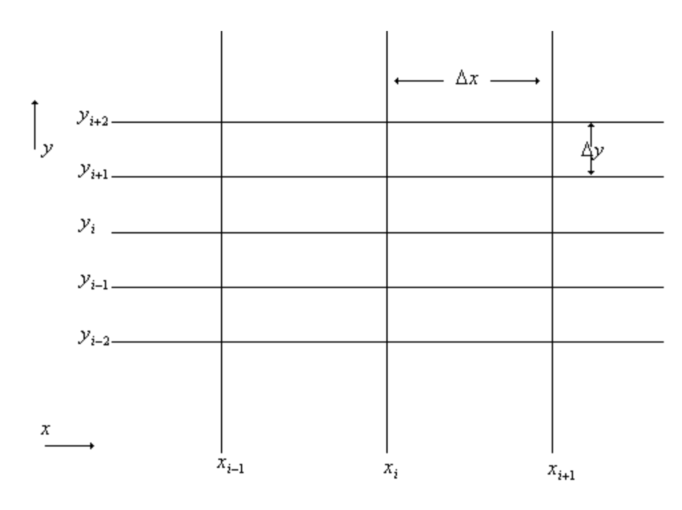
و

$$f(x_n - h) = f(x_n) - f'(x_n)h + \frac{f''(x_n)h^2}{2!} + ...$$

و منهما نرى أن:

$$\frac{f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}}{h^2} = f_n'' + 0(h^2)$$

حيث وضعنا $f_n = f(x_n)$



الشكل (1.9) توضيح النطاق لمسائل في بعدين

يمكن أيضا الحصول على العلاقة:

$$f_n' = \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2h} + 0\left(h^2\right)$$

وعليه وباستخدام هذه العلاقات في المعادلة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{...... (1.9)}$$

نحصل على:

$$\frac{u\left(x_{i+1}, y_j\right) - 2u\left(x_i, y_j\right) + u\left(x_{i-1}, y_j\right)}{\left(\Delta x\right)^2} + \frac{u\left(x_i, y_{j+1}\right) - 2u\left(x_i, y_j\right) + u\left(x_i, y_{j-1}\right)}{\left(\Delta y\right)^2} = 0 \qquad \text{...... (2.9)}$$

لو عرفنا :

$$u_{i,j} \quad \text{بـــــ} \quad u(x_i, y_j)$$

أي أن:

$$u_{i,j} \equiv u(x_i, y_j)$$

فإن المعادلة (2.9) تصبح على النحو:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0 \qquad ......\ (3.9)$$

ولو أخذنا $\Delta x = \Delta y = h$ وهو الاختيار المعتاد في مثل هذه الحالات فإن المعادلة (3.9) تصبح:

$$\nabla^2 u_{i,j} = \frac{1}{h^2}\{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}\} = 0 \qquad ......\ (4.9)$$

ولو رجعنا للشكل (1.9) للاحظنا أنه بالنسبة للنقطة المركزية (x_i, y_j) ؛توجد خمس نقاط ككل يميناً وشمالاً وفوق وتحت و عند المركز وهكذا نستطيع أن نكتب صورياً المعادلة (4.9) على الشكل:

$$\nabla^2 u_{i,j} = \frac{1}{h^2}\begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix} u_{i,j} = 0 \qquad ......\ (5.9)$$

والمعادلة (5.9) هي التمثيل الصوري لمؤثر لابلاس ذي النقاط الخمس.

3.9 معادلة لابلاس بمنطقة مستطيلة

Lapalace's Equation in a Rectangular Region

إحدى المسائل المعروفة في هذا الخصوص تدفق الحرارة باستقرار في المواد.

ولتوضيح ذلك دعنا ندرس المثال التالي:

مثال (1.9)

صفيحة رقيقة من الحديد الصلب على شكل مستطيل بأبعاد $10cm \times 20cm$. ثبتت إحدى الحواف $(10cm)$ عند درجة حرارة $10^{o}C$ بينما ثبتت كل الحواف الأخرى عند $0^{o}C$. احسب درجة الحرارة عددياً عند النقاط الداخلية.

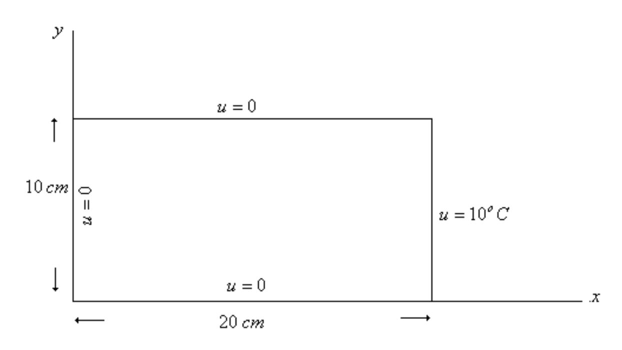
الحل:

لو اخترنا محاور، الإحداثيات كما بالشكل (2.9) فإنه يمكن صياغة المسألة رياضياً كما يلي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad 0<x<20 \quad , \quad 0<y<10$$

$$u(x,0)=0$$
$$u(x,10)=0$$
$$u(0,y)=0$$
$$u(20,y)=10$$

والشروط ء كما في هذه المسألة والتي تتعين بها قيمة الدالة عند حدود النطاق تسمى بالشروط الحدية لديريكليت (Dirichlet).



الشكل (2.9) معادلة لابلاس في مستطيل.

نستعمل الآن المعادلة الفرقية (4.9) ونلاحظ أن أي نقطة يمكن إيجادها بدلالة أربع نقاط مجاورة. نقوم بالتجزئة ولنأخذ في البداية، وللتوضيح، $h = 5cm$ [وهي قيمة كبيرة نسبياً و المفروض أن نأخذ قيمة h صغيرة]، ولو نظرنا للشكل (3.9) للاحظنا أن النقاط مجهولة الحرارة هي ثلاث بداخل المستطيل فلنسمها u_2, u_1 و u_3 ولنكتب المعادلة الفرقية ثلاث مرات لنجد أن:

$$\frac{1}{2.5}\left(0+0+u_2+0-4u_1\right)=0$$
$$\frac{1}{2.5}\left(u_1+0+u_3+0-4u_2\right)=0$$
$$\frac{1}{2.5}\left(u_2+0+10+0-4u_3\right)=0$$

بإعادة الترتيب نحصل على المعادلات:

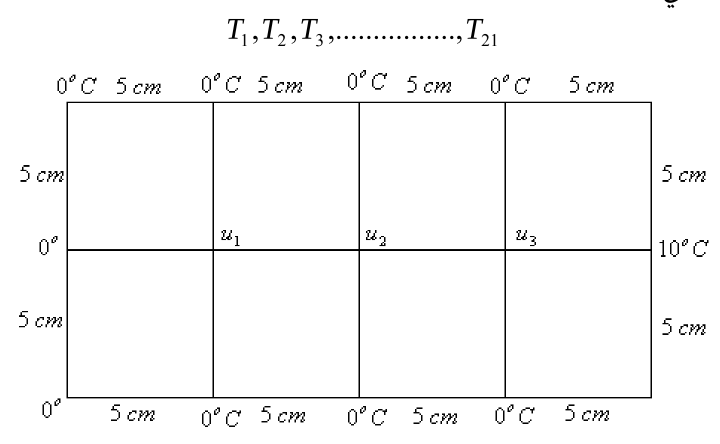
$$\begin{aligned} -4u_1 + u_2 \quad &= 0 \\ u_1 - 4u_2 + u_3 &= 0 \\ u_2 - 4u_3 &= -10 \end{aligned}$$

وبحل هذه المعادلات نجد أن:

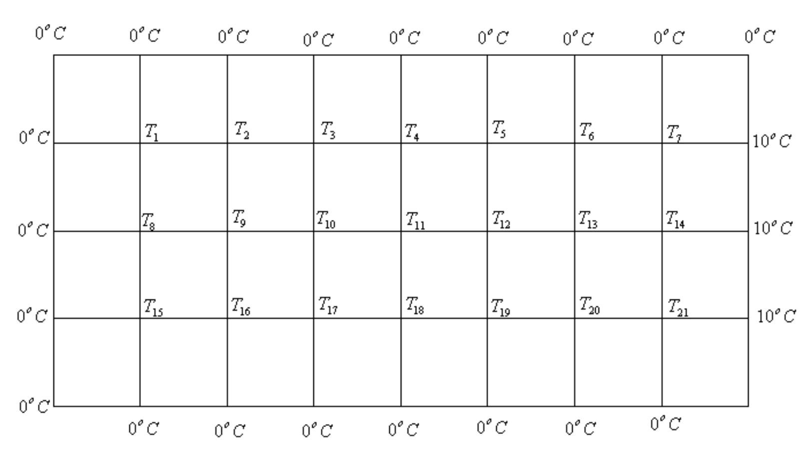
$$u_1 = 0.1786$$
$$u_2 = 0.7143$$
$$u_3 = 2.6786$$

فيما سبق قمنا باختيار h الكبيرة وهي $5\ cm$ و ذلك حتى نوضح طريقة الحل ولكن إذا أردنا دقة أكثر قمنا باختيار قيمة لـ h أصغر ؛فعلى سبيل المثال لو أخذنا $h = 2.5\,cm$؛ فإنه، وبالرجوع للشكل (4.9)، نرى أنه توجد 21 نقطة داخل المستطيل مطلوب تعيين درجة الحرارة عندها وهذه هي:

$$T_1, T_2, T_3, ..., T_{21}$$



الشكل (3.9) معادلة لابلاس للحالة $\Delta x = \Delta y = 5\ cm$.



الشكل (4.9) معادلة لابلاس للحالة $\Delta x = \Delta y = 2.5\ cm$.

بكتابة المعادلات كما سبق و حلها نجد أن:

$$T_1 = 0.0353 \quad T_8 = 0.0499 \quad T_{15} = 0.0353$$
$$T_2 = 0.0913 \quad T_9 = 0.1289 \quad T_{16} = 0.0913$$
$$T_3 = 0.2010 \quad T_{10} = 0.2832 \quad T_{17} = 0.2010$$
$$T_4 = 0.4296 \quad T_{11} = 0.6019 \quad T_{18} = 0.4296$$
$$T_5 = 0.9153 \quad T_{12} = 1.2654 \quad T_{19} = 0.9153$$
$$T_6 = 1.9663 \quad T_{13} = 2.6289 \quad T_{20} = 1.9663$$
$$T_7 = 4.3210 \quad T_{14} = 5.317 \quad T_{21} = 4.3210$$

نلاحظ أيضاً انه يمكن إيجاد الحل التحليلي لهذه المسألة وذلك باستخدام طريقة الفك بواسطة الدوال الذاتية أو باستخدام متسلسلات فورييه Fourier وهي طريقة شائعة ومستعملة لحل مسائل القيم الحدية بالفيزياء.

لو قمنا بذلك لحصلنا على:

$$u_1 = 0.1094$$
$$u_2 = 0.548$$
$$u_3 = 2.6094$$

ولو قارنا هذه القيم بقيم u_2, u_1 و u_3 الناتجة من استخدام $h = 5\ cm$ ، أو بقيم T_{11}, T_9 و T_{13} لتبينا مدى دقة الطريقة العددية وللاحظنا أيضا أن مقدار الخطأ قل بكثير عندما صغرنا قيمة h.

وهكذا للحصول على نتائج أفضل علينا إعادة الحسابات ولكن بقيمة لـ h صغيرة (مثلاً: $h = 1\ cm$).

ملاحظات

1. يمكننا معالجة معادلة بواسون ($\nabla^2\varphi + 5 = 0$ مثلاً) بنفس الطريقة السابقة، وما يستجد هنا هو الحد غير الصفري والذي يضاف إلى المعادلات.
2. توجد معادلات بشروط على المشتقة بدلاً من شروط على الدالة وسوف نعطي الطريقة لحل مثل هذه المعادلات فيما بعد.
3. يمكن أيضاً معالجة معادلة لابلاس في ثلاثة أبعاد بطريقة مشابهة غير أنه يجب أن نضع في الحسبان أن النطاق هنا نطاق بالفراغ بدلاً من نطاق في المستوي.
4. لكي نقوم بالحسابات العددية نلجأ إلى الحاسوب والبرمجيات المختلفة. مثل هذه البرامج الفرعية البرنامج : SUBROUTINE LAMPTX (A,NDIM,N,M)

وهو يضع معاملات مؤثر لابلاس في منطقة مستطيلة بـ N من النقاط في الاتجاه السيني و M من النقاط في الاتجاه الصادي. ويخزنها في المصفوفة A التي بعدها NDIM.

5. يدخل أيضاً ضمن نطاق حل هذه المعادلات معادلـة الجهد (Potential Equation).

4.9 معادلات تفاضلية مكافئية **Parabolic Differential Equations**

يوجد العديد من المسائل التي تدخل ضمن هذا النطاق ولعل أحدها هي مسائل التدفق الحراري للحالة غير المستقرة Unsteady-State Heat Flow ؛ ففي بعد واحد تكون المعادلة هي:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c\rho\frac{\partial u}{\partial t} \qquad ......\ (6.9)$$

هنا x تمثل الإحداثي السيني (الطول) و t الزمن وفي بعدين، أي في المستوى، تكون المعادلة هي:

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t} \qquad ......\ (7.9)$$

بينما في ثلاثة أبعاد تكون المعادلة على الصورة:

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t} \qquad ......\ (8.9)$$

أما بالنسبة للشروط الابتدائية والحدية يمكن أن تكون بالنسبة لبعد واحد، عبارة عن:

$$u(x,0) = f(x)$$

و

$$u(0,t) = c_1 \quad , \quad u(l,t) = c_2$$

حيث c_1 و c_2 ثوابت.

وللبساطة نعتبر المسألة في بعد واحد ونتبع الطريقة الصريحة والتي سنأتي على ذكر تفاصيلها فيما بعد.

من المعادلة (6.9) تكون المعادلة هي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{c\rho}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{...... (9.9)}$$

نستبدل المشتقات بالفروق لنجد أن:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=x_i \\ t=t_j}} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{(\Delta x)^2} + 0(\Delta x)^2 \qquad \text{...... (10.9)}$$

و

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\substack{x=x_i \\ t=t_j}} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + 0(\Delta t) \qquad \text{...... (11.9)}$$

حيث:

$u_i^j \equiv u(x_i, t_j)$؛ وعليه من المعادلتين (10.9) و (11.9) في المعادلة (9.9) نجد أن:

$$u_i^{j+1} = \frac{k\,\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}\left(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j\right) + \left(1 - \frac{2k\,\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}\right)u_i^j \qquad \text{...... (12.9)}$$

الآن نجزئ الفترة إلى فترات فرعية متساوية وحيث إن u_i^o معلومة نستطيع أن نحصل على u عند t_1 من المعادلة السابقة وكذلك باستعمال الشروط الحدية.

نلاحظ أيضاً أن Δx و Δt لقيمهما النسبيتين تأثير في الحصول على حل متقارب، وكما سنرى من اتزان الحلول العددية لمثل هذه المعادلات، فيما بعد، انه يوجد شرط على المقدار:

$$\zeta = \frac{k\,\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} \qquad \text{...... (13.9)}$$

فإذا ما كان ζ أكبر من $\frac{1}{2}$ فإن حالة عدم الاستقرار أو الثبات (Instability) تظهر بينما إذا أخذنا ζ أقل من أو تساوي $\frac{1}{2}$ فإننا نحصل على حل دقيق ومتزن.

وإذا كانت $\zeta = \frac{1}{2}$ فإن المعادلة (12.9) تصبح على الشكل:

$$u_i^{j+1} = \frac{1}{2}\left(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j\right) \qquad \text{...... (14.9)}$$

نلاحظ أن اختيارنا لقيمة ζ سيحدد قيم (Δt) و Δx بدلالة بعضهما البعض فلو كانت $\zeta = \frac{1}{2}$ واخترنا $\Delta x = 0.25\ cm$ فإن $\Delta t = 0.206\sec$ وذلك في حالة استخدام مادة الحديد الصلب والذي يمتلك الثوابت:

$$c = 0.11\ {cal}/{g\,^oC}$$

$$\rho = 7.8\ {g}/{cm^3}$$

$$k = 0.13\ {cal}/{\sec^o C\, g}$$

مثال (2.9)

إذا أعطيت صفيحة كبيرة مسطحة من الحديد الصلب سمكها $2\,cm$ وإذا كانت درجة الحرارة الابتدائية بالصفيحة كدالة في المسافة من أحد الأوجه تعطى بالعلاقة:

$$u = 100x \quad , \quad 0 \le x \le 1$$
$$u = 100(2-x) \quad , \quad 1 \le x \le 2$$

أوجد الحرارة كدالة في x و t إذا ثبت الوجهان عند درجة $0^o C$.

الحل:

كما سبق و أن تحدثنا في هذا البند نرى أن اختيار $\Delta x = 0.25\ cm$ سيؤدي إلى تجزئة الفترة الزمنية إلى فترات فرعية طولها $\Delta t = 0.206\,s$.

نعلم أيضاً أن الشروط .الحدية هي:

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad u(2,t) = 0$$

كما أنه من الشروط الابتدائية نرى أن:

$$u(x,0) = 100x \quad , \quad 0 \le x \le 1$$
$$= 100(2-x) \quad , \quad 1 \le x \le 2$$

ويمكن التعبير عن هذه الشروط بطريقة أخرى، بعد التجزئة، وذلك كالآتي:

الشروط الحدية:

$u_N^j = 0$ و $u_0^j = 0$ لكل j وحيث N هي عدد فترات x الفرعية.

الشروط الابتدائية:

$$u_i^o = 100\,x_i \quad , \quad 0 \le x_i \le 1$$
$$u_i^o = 100\left(2 - x_i\right) \quad , \quad 1 \le x_i \le 2$$

وهكذا وبنفس الطريقة المتبعة بالبند السابق نستطيع أن نحسب كل صف من قيم u المقابل لقيمة زمنية معينة . فعلى سبيل المثال الصف الأول ويقابل القيمة الزمنية $t_o = 0$ يمكن حسابه مباشرة من الشروط الابتدائية لنحصل على:

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.50	1.75	2
u_i^o	0	25	50	75	100	75	50	25	0

لحساب u_i^1، أي عندما نزيد الفترة الزمنية بمقدار $0.206s$، فإننا نستخدم القيم السابقة والمعادلة (14.9) والشروط الحدية للمسألة. فمثلا لحساب u_i^1 نرى أن:

$$u_1^1 = \frac{1}{2}\left(u_2^0 + u_0^0\right) = \frac{1}{2}\left(50 + 0\right) = 25$$

كذلك نرى أن:

$$u_2^1 = \frac{1}{2}\left(u_3^0 + u_1^0\right) = \frac{1}{2}\left(75 + 25\right) = 50$$

وهكذا نستطيع الحصول عل بقية القيم بالصف وبذلك تكون قيم u_i^1 على النحو $(t = 0.206s)$:

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.50	1.75	2
u_i^1	0	25	50	75	75	75	50	25	0

علي نفس المنوال نستطيع حساب u_i^2 ويمكن بسهولة التوصل إلى القيم عند $t = 0.412\,s$ على الصورة:.

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.50	1.75	2
u_i^2	0	25	50	62.5	75	62.5	50	25	0

وهكذا يمكننا باستخدام الشروط الحدية والابتدائية والمعادلة (14.9) الحصول علي قيم u عند أي لحظة زمنية معطاة بالعلاقة: $t = n\,\Delta t$

حيث $\Delta t = 0.206s$ و n عدد صحيح موجب.

لا يفوتنا ملاحظة التماثل الواضح في هذه المسألة و المرتبط بالتأكيد بالشروط الابتدائية.

الآن بالرجوع للحل التحليلي، والذي يمكن التوصل إليه باستخدام متسلسلات فورييه، نرى أن:

$$u = 800\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{\pi^2(2n+1)^2}\cos\left[\frac{(2n+1)\pi(x-1)}{2}\right]e^{-0.3738(2n+1)^2 t}$$

وإذا قمنا بحساب u لقيم مناظرة للقيم التي تم حسابها فيما سبق فإننا نجد أن الخطأ في الحل لا يتجاوز 4%، وهذا يوضح مدى صلاحية الطرق العددية في مثل هذه المسائل.

5.9 معادلات زائدية Hyperbolic Equations

تمثل هذه المعادلات القسم الثالث والتي من أهمها في الفيزياء المعادلة الموجية التي تصف تذبذب .وتر مثلاً؛ والمعادلة التفاضلية في هذه الحالة هي:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T\,g}{w}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad ......\ (15.9)$$

حيث y هي الإزاحة الرأسية و w الوزن لوحدة الطول و T قيمة الشد الثابتة في الوتر و g عجلة الجاذبية و x الإزاحة الأفقية.

نقوم مرة أخرى باستخدام الفروق المحدودة ونكتب:

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{T\,g}{w}\left(\frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{(\Delta x)^2}\right)$$

بالحل لـ y_i^{j+1} نجد أن:

$$y_i^{j+1} = \frac{T\,g(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2}\left(y_{i+1}^j + y_{i-1}^j\right) - y_i^{j-1} + 2\left(1 - \frac{T\,g(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2}\right)y_i^j \qquad ......\ (16.9)$$

ولو قمنا باختيار:

$$\zeta \equiv \frac{T\,g(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2} = 1$$

أو أن:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\sqrt{Tg/w}} \qquad ......\ (17.9)$$

لسهلت لنا الحسابات ولحصلنا على:

$$y_i^{j+1} = y_{i+1}^j + y_{i-1}^j - y_i^{j-1} \qquad ......\ (18.9)$$

لاحظ أن y_i^{j+1} تعتمد على الشروط عند t_{i-1}, t_j

مثال (4.9)

خذ في الاعتبار المعادلة الموجية:

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} \qquad \left(c^2 \equiv {}^{Tg}\!/_{w}\right)$$

و الشروط الحدية:

$$u(0,t) = 0$$
$$u(20,t) = 0$$
$$y_t(x,0) = 0$$

والشروط الابتدائية:

$$y(x,0) = \begin{cases} x \ , & 0 \le x \le 10 \\ 20 - x \ , & 10 \le x \le 20 \end{cases}$$

(هذه المسألة تمثل تذبذب وتر طوله $20\,cm$، سرعته الابتدائية صفر والإزاحة الابتدائية معطاة بـ$y(x,0)$ كما أن طرفيه مثبتان)

وإذا كان $c = 10\ cm/s$ فأوصف كيف تقوم بحل هذه المسألة عددياً.
من معطيات المسألة وإذا أخذنا $\zeta = 1$ فإنه باختيار $\Delta x = 5\ cm$ (وذلك لسهوله التوضيح) فإن $\Delta t = 0.5\,s$.

الآن نترجم الشروط المختلفة كالآتي:

الشروط الحدية:

$y_0^j = 0 \quad , \quad y_n^j = 0$ حيث n هو عدد الفترات الفرعية لـ x.

الشروط الابتدائية:

$$y_i^0 = x_i \quad , \quad 0 \le x_i \le 10$$
$$= 20 - x_i \quad , \quad 10 \le x_i \le 20$$

و
$$y_j^1 = y_j^0$$

الآن عند $t = 0$ نرى أن:

x_i	0	5	10	15	20
y_i^0	0	5	10	5	0

وحيث إن $y_i^1 = y_i^0$ فإنه عند $t = 0.5\ s$ نحصل على:

x_i	0	5	10	15	20
y_i^1	0	5	10	5	0

باستخدام المعادلة (18.9) والمعلومات السابقة من y_i^o و y_i^1 و الشروط حدية والابتدائية نستطع كتابة الحل لـ $t = 1s$ كالآتي:

x_i	0	5	10	15	20
y_i^2	0	5	0	5	0

وهكذا نستطيع، بنفس الطريقة، كتابة الحل عند t_3 و t_4 و. . . . الخ.

نرجع الآن لسبب اختيارنا للعدد ζ على أنه الوحدة. هذا الاختيار بالطبع خاضع لكل استفسار وعن مدى صلاحيته.

عموماً إذا اختيرت النسبة أكبر من الواحد فإن التقارب يكون غير مؤكد، أي أن اتزان الطريقة مرتبط بوحدة هذه النسبة.

من المدهش حقاً أنه إذا كانت النسبة أقل من الواحد فإن الدقة تكون أقل؛ بينما تكون دقيقة جداً عندما تكون $\zeta = 1$.

كل هذا يقودنا للحديث عن اتزان الطرق العددية لحل مثل هذه المعادلات وهو ما سنقوم بعمله بالبند الموالي.

6.9 اتزان الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية

Stability of Numerical Methods to Solve Partial Differential Equations

عندما نتحدث عن تقارب الحل لأي معادلة تفاضلية فإنه علينا أن نربط بين ذلك وبين مفهومين مهمين وهما عدم التناقض (Consistency) والاتزان (Stability).

عدم التناقض

هذا يعني أنه إذا قرب أي حل عددي (باستخدام الفروق المحدودة) حل معادلة تفاضلية ما فإنه لا يمكن أن يكون حلاً لأي معادلة أخرى. وهذه الخاصية تعتبر دائماً صالحة أو مضمونة ولا تناقش كثيراً.

الاتزان

وتعتبر هذه الخاصية شرطاً ضرورياً وكافياً للتقارب. وتعين خاصية المعادلة الفرقية التي استعملت للحل، وذلك عندما $\Delta t \to 0$ وحيث عندئذ تتواجد نهاية عظمى للمدى الذي تكبر إليه أي معلومة، صادرة عن الشروط الابتدائية أو قد نتجت عن الشروط الحدية أو برزت من خلال أي نوع من الأخطاء الحسابية، في حساباتنا.

ويمكن اختبار هذه الخاصية باستخدام مفكوك فورييه وتعريف معامل تكبير ζ ووضع الشرط $|\zeta| \leq 1$ على هذا المعامل وبالتالي نصل إلي الشرط الذي تحققه ζ.

غير أنه يمكننا مناقشة هذه المسألة أيضاً بالرجوع لمسألة القيم الذاتية.

$$Ax = \lambda x$$

ونتذكر أنه لـ N من القيم الذاتية المختلفة تكون المتجهات الذاتية مستقلة خطياً. لتوضيح ذلك نرجع للمثال (2.9) وهو مثال تدفق الحرارة في الحالة غير المستقرة؛ وحيث إن التجزئة إلى N من النقاط تعطى مركبات متجه الحل للمعادلة وهي:

$$u_i^{j+1} = \zeta\left(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j\right) + (1-2\zeta)u_i^j$$

فإنه يكن كتابة المسألة على الصورة:

$$\begin{bmatrix} u_1^{j+1} \\ y_2^{j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ u_N^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\zeta & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \zeta & (1-2\zeta) & \zeta & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \zeta & (1-2\zeta) & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \zeta \\ 0 & & \cdots & & \cdots & & \zeta & (1-2\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^j \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ u_N^j \end{bmatrix} \qquad \ldots.\ (19.9)$$

ولو تجاوزنا وكتبنا المتجه على النحو u^{j+1} ورمزنا للمصفوفة المربعة بـ A فإننا نرى أن:

$$u^j = Au^{j-1} = A^2 u^{j-2} = \ldots\ldots = A^j u^o$$

كما يكون مقدار الخطأ هو e^j و حيث:

$$e^j = u^j - \tilde{u}^j = \ldots\ldots = A^j e^o$$

وهكذا نرى كيف ينتشر الخطأ من e^{o} ؛ يمكن أيضا كتابة الخطأ بدلالة القيم الذاتية λ لـ A والمركبات الاتجاهية المماثلة (x_i) على النحو:

$$e^{j} = \sum_{i=0}^{N} c_i \lambda^{i} x_i$$

وهكذا من هذا المفكوك نرى أنه إذا كانت القيم الذاتية اقل من أو تساوي الواحد فإن الأخطاء لا تتزايد. أي أن الحسابات متزنة وهذا يعني أنه يمكن كتابة الشرط التحليلي للاتزان كالآتي:

((لكي يحصل اتزان بالحسابات يجب أن تكون أكبر قيمة ذاتية لمصفوفة المعاملات (A) أقل من أو تساوي الواحد (1))).

بالرجوع للمثال السابق وبالنظر للمصفوفة A بالمعادلة (19.9) نرى السبب في كون $\zeta = \frac{1}{2}$.

7.9 الطرق العددية الصريحة والضمنية Explicit and Implicit Numerical Methods

حتى الآن تم استعمال الطريقة الصريحة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية،فيها يتم استخدام شبكة معينة من النقاط بالنطاق ويتم حساب u صراحة للنقاط غير المعلومة بدلالة قيم u المعطاة بالمسألة. وباستعمال هذه الطريقة الصريحة يجب التحقق من تقارب كل مسألة؛ أي أنه يجب التأكد في كل معادلة تفاضلية من أن القيم العددية المحسوبة تمثل تقريباً للقيم الحقيقية للحل.

أو بمعنى آخر لو كان الخطأ هو w (ويمثل الفرق بين الحل التحليلي والحل

العددي)؛ فإنه يقال عن طريقة الفروق المحدودة بأنها متقاربة إذا كان $w \to 0$ عندما $\Delta x \to 0$ و $\Delta t \to 0$. وهذا بدوره يضع شرطاً على بعض الكميات بالمعادلات التفاضلية كما سبق وأن حصلنا على:

$$\frac{T\ g\Delta t}{cp(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}$$

بالنسبة لمعادلة تدفق الحرارة - الحالة غير المستقرة و:

$$\frac{T\ g(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2} = 1$$

بالنسبة للمعادلة الموجية.

ولقد رأينا بالبند السابق كيف نصل إلى مثل هذه الشروط.

كمثال آخر على استخدام الطريقة الصريحة، لو أخذنا المسألة:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad 0 < x < 1\, , 0 < t < T$$

بالشروط الابتدائية:

$$u(x,0) = f(x) \quad 0 \le x \le 1$$

والشروط الحدية:

$$u(0,t) = g_o(t) \quad 0 \le t \le T$$
$$u(1,t) = g_1(t) \quad 0 \le t \le T$$

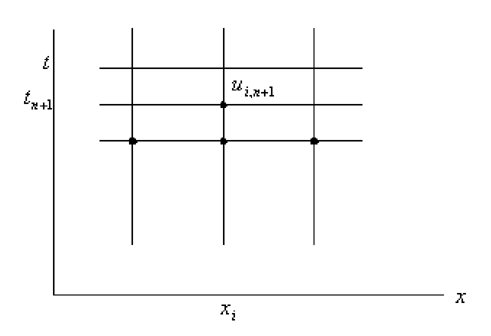
فإن المعادلة الفرقية هي:

$$u_{i,n+1} = \lambda\, u_{i-1,n} + (1-2\lambda)u_{i,n} + \lambda u_{i+1,n}$$

حيث:

$$\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

ويكون هذا الحل متقارباً إذا كان $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$. وكما نرى أنه لحساب $u_{i,n+1}$ نستعمل ثلاث القيم لـ u وهي $u_{i,n}$ و $u_{i-1,n}$ و $u_{i+1,n}$ كما هو موضح بالشكل (5.9) والذي يمثل شبكة النقاط (x_i, t_n).



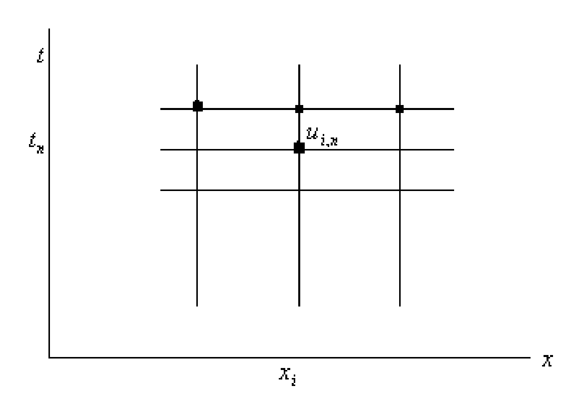
الشكل (5.9) الطريقة الصريحة

هذا عن الطريقة الصريحة، أما الطريقة الضمنية فإنها تستخدم صيغة أخرى لحساب الفروق وذلك كالآتي (بالنسبة لنفس المثال):

$$\frac{u_{i,n+1} - u_{i,n}}{\Delta t} = \frac{u_{i-1,n+1} - 2u_{i,n+1} + u_{i+1,n+1}}{(\Delta x)^2}$$

أي أنه تم اعتبار النقطة عند t_{n+1} عند حساب المشتقة الثانية وبذلك تحسب $u_{i,n}$ بدلالة النقاط الثلاث $u_{i+1,n+1}$ و $u_{i,n+1}$ و $u_{1-1,n+1}$ كما بالشكل (6.9).

والميزة في استخدام الطريقة الضمنية هو أنها تتقارب عندما $\Delta x \to 0$ و $\Delta t \to 0$ بغض النظر عن النسبة $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.



الشكل (6.9) الطريقة الضمنية

8.9 الشروط الحدية وأنواعها Boundary Conditions and Their Kinds

ونحن نتكلم عن الشروط الحدية نفترض أن القارئ لابد وأن مرت به الأنواع المختلفة لهذه الشروط؛ غير أنه لا بأس أن نتعرض، من خلال مثال ما، لهذه الشروط في عجالة وكيفية معالجتها عند تحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلة فرقية:

لنأخذ المثال:

$$u_{xx} + u_{yy} = u_t$$

حيث:

$$u = u(x, y, t)$$

معرفة في منطقة R (محدودة) في المستوى xy. يمكن أن تكون الشروط الحدية كالآتي:

1. شرط ديريكليت (النوع الأول) $u = g$.
2. شرط نيومان (النوع الثاني) $\alpha\, u_n + \beta u_s = g$.

   (u_s المشتقة المماسية و u_n المشتقة العمودية).
3. شرط روبن(النوع الثالث) $\alpha\, u_n + \beta u_s + \gamma\, u = g$.

   وحيث $\alpha\,, \beta, \gamma$ و g كلها ثوابت.

وترجمة مثل هذه المسائل إلي فروق محدودة تعتمد عل الشرط الحدي المعين.فلو أخذنا في هذا المثال الشرط الحدي: $-u_x + a u = g$ عند $x = 0$ ؛فإننا نرى أنه لحساب u_t و u_{yy} لن تكون هناك أي مشكلة ولكن المشكلة تكون في حساب u_{xx}.

لعمل ذلك نركز على النقطة $(0, j)$ ثم نستخدم مفكوك تايلور لحساب $u_{1,j}$ بدلالة $u_{0,j}$ ومشتقاتها؛ أي أن:

$$u_{1,j} = u_{0,j} + u_x \Delta x + u_{xx} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + 0(\Delta x)^3$$

وبذلك نرى أن:

$$u_{xx} = \frac{2}{(\Delta x)^2}\left[u_{1,j} - u_{0,j} - u_x(\Delta x)\right] + 0(\Delta x)$$

الآن باستخدام الشرط الحدي $u_x = au - g$ نحصل على:

$$u_{xx} = \frac{2}{(\Delta x)^2}\left[u_{1,j} - (a\,\Delta x + 1)u_{0,j} - g(\Delta x)\right] + 0(\Delta x)$$

وبذلك تكون المعادلة الفرقية للمسألة عند $(0, j)$ هي:

$$\frac{2}{(\Delta x)^2}\left[u_{1,j,n+1} - (a\,\Delta x + 1)u_{0,j,n+1} - g(\Delta x)\right]$$
$$+ \frac{1}{(\Delta y)^2}\left[u_{0,j+1,n+1} - 2u_{0,j,n+1} - u_{0,j-1,n+1}\right] = \frac{u_{0,j,n+1} - u_{0,j,n}}{\Delta t}$$

لاحظ أنه في مسائل التوصيل الحراري ولو كان الجانب $x = 0$ معزولاً $(u_x = 0)$ (أي أن $a = g = 0$)فإن المشتقة الثانية عند $(0, j)$ تأخذ الشكل البسيط:

$$u_{xx} = \frac{2}{(\Delta x)^2}\left[u_{1,j} - u_{0,j}\right] + 0(\Delta x)$$

9.9 ملاحظات هامة

1. لم نركز على التفاصيل الرياضية بالبنود السابقة وخصوصاً ببند الاتزان والشروط الحدية وذلك لأن موضوع الكتاب هو الطرق العددية؛وهذا يعني أننا نستخدم الطرق ونترك للقارئ المهتم أو للرياضي الخوض في التفاصيل الرياضية والبراهين المختلفة ولن نجد الوقت هنا لغير التطبيقات.

2. في حالة تواجد مشتقات من الرتبة الثانية مع مشتقات من الرتبة الأولى كما في حالة الإحداثيات الأسطوانية أو الكروية فإنه يمكننا(مثلا) استخدام التقريب:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{u_{i-1}-2u_i-u_{i+1}}{(\Delta r)^2}+\frac{1}{r_i}\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\,\Delta r}$$

وحيث قمنا بتقريب الجزء الثاني باستخدام الفروق المركزية.

3. لقد قدمنا في دراساتنا السابقة للطرق الصريحة والضمنية ولكن بشكل عام . في الحقيقة توجد طرق متخصصة مثل طريقة كرانك ونكلسون وطريقة دوفورت وفراكل، وطريقة بركات وكلارك وغيرهم وللقارئ المتلهف للاطلاع على مثل هذه الطرق أن يرجع للمراجع الموجودة بآخر هذا الكتاب.

تمارين (9)

1. استعمل مؤثر لابلاس في الإحداثيات القطبية لكتابة المعادلة الفرقية لـ $\nabla^2 u = 0.2$ على منطقة نصف دائرية نصف قطرها 4. خذ $\Delta r = 1$ و $\Delta\theta = \pi/6$. والشروط الحدية هي $u = 10$ على الحافة المستقيمة و $u = 0$ على الحافة الدائرية.

2. أوجد الحرارة عند $t = 2.062\ s$ في المثال (2.9) الذي يتناول تدفق الحرارة في الحالة غير المستقرة وذلك إذا كانت :

$$u(x,0) = 100\sin\frac{\pi x}{2}$$

استعمل الطريقة الصريحة بـ $\Delta x = \dfrac{1}{4}$؛ قارن بالحل التحليلي:

$$100\,e^{-0.3738t}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

3. تحقق من صحة التقريبات الفرقية التالية، وذلك عند استخدامها في بعدين عند النقطة $(0, j)$.

أ) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \dfrac{u_{i-2,j} - 4u_{i-1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{(\Delta x)^4} + 0(\Delta x)^2$.

ب) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4(\Delta x)(\Delta y)} + 0\left((\Delta x + \Delta y)^2\right)$.

4. أكتب المعادلات الفرقية للمعادلات التفاضلية

أ) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_t$.

ب) $u_t - ku_{xx} = e^{-t}$.

ج) $u_t - ku_{xx} - ru = q(t)$.

د) $u_{tt} = c^2 u_{xx} + Q \sin \omega t$.

5. أوصف طريقة حلك، عدديا، للمعادلة التفاضلية:

$$u_t - ku_{xx} = q(x,t) \qquad 0 < x < L \, , t > 0$$

بالشروط :

$$\begin{aligned} &u(0,t) = 0 && t > 0 \\ &u(L,t) = 0 && t > 0 \\ &u(x,0) = 0 && 0 < x < L \end{aligned}$$

6. أكمل حل المثال (4.9) وذلك لتشمل اللحظات الزمنية حتى $t = 5$ sec.

7. قم بحل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية عددياً:

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_t && 0 < x < a \, , 0 < y < b \, , 0 < z < c \\ &u(x,y,0) = f(x,y) && 0 < x < a \, , 0 < y < b \\ &u(x,y,c) = 0 && 0 < x < a \, , 0 < y < b \\ &u(x,0,z) = u(x,b,z) = 0 && 0 < x < a \, , 0 < z < c \\ &u(0,y,z) = u(a,y,z) = 0 && 0 < y < b \, , 0 < z < c \end{aligned}$$

(تمثل هذه المسألة إحدى معادلات لابلاس في ثلاثة أبعاد) .

الفصل العاشر

مواضيع متنوعة

يحتوي هذا الفصل على:

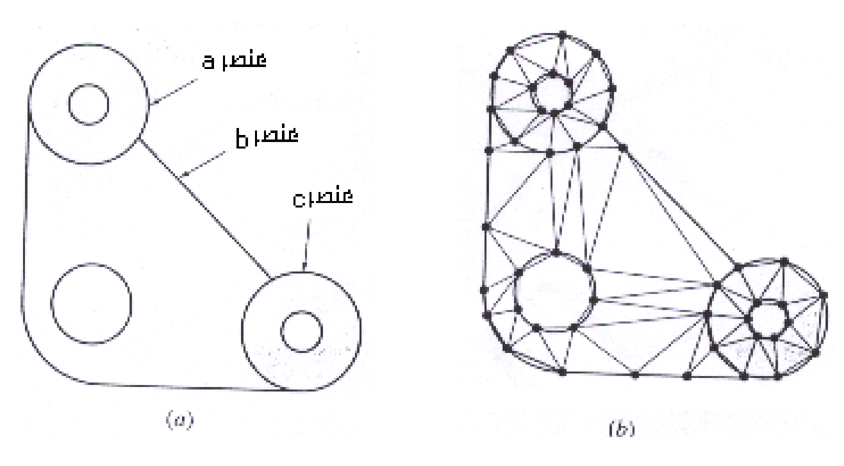
1.10 طريقة العناصر المحدودة (تقديم) Finite Element Method

لقد تعرضنا في الفصلين الأخيرين إلى طريقة الفروق المحدودة في حل مسائل القيم الذاتية وهي صالحة ودقيقة إذا ما كانت هندسة المسألة بسيطة [مستطيل مثلاً]؛ غير أنه في حالة كون النطاق تحت الدراسة مركبا أو معقداً فإننا نستخدم طريقة العناصر المحدودة.

في إيجاز كبير تتلخص طريقة الفروق المحدودة في كتابة المعادلة التفاضلية للمسألة عند نقطة معينة بعد تحويل النطاق إلى شبكة من النقاط وبالتالي تمثيلها بمعادلة فرقية وإيجاد الحل. ولكن، وكما أسلفنا، لهذه الطريقة عيوبها والتي تتمثل في ضرورة وجود تجانس بالمسألة وكذلك افتراض هندسة بسيطة للنطاق.

ولكن لو كانت هندسة النطاق غير منتظمة أو أن الشروط الحدية ليست تلك المعتادة أو أن الأوساط غير متجانسة [مادة الصفيحة مصنوعة من معدنين مختلفين مثلاً]، فإننا نستخدم طريقة العناصر المحدودة حيث يتم تقسيم النطاق إلى مناطق ذات أشكال سهلة- أي تقسيم النطاق إلى "عناصر"؛ ثم نوجد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية لكل من هذه العناصر. كما يتم ربط هذه العناصر ببعضها البعض لإيجاد الحل الكلي. أي أن المعادلة التفاضلية تحقق بشكل قطعي (أي قطعة قطعة).

وهكذا فإننا في مثل هذه الحالات نقوم باستخدام العناصر بدلا من الشبكة المستطيلية؛ وهذا يعطي تقريباً أفضل لتلك المنظومات التي تملك أشكالاً غير منتظمة. [أنظر الشكل (1.10)].

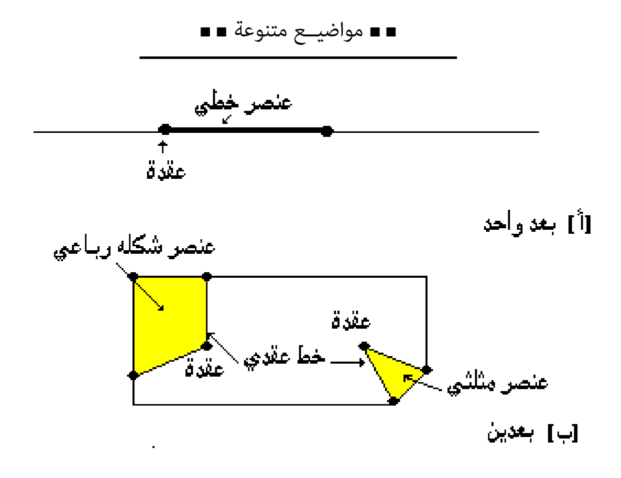


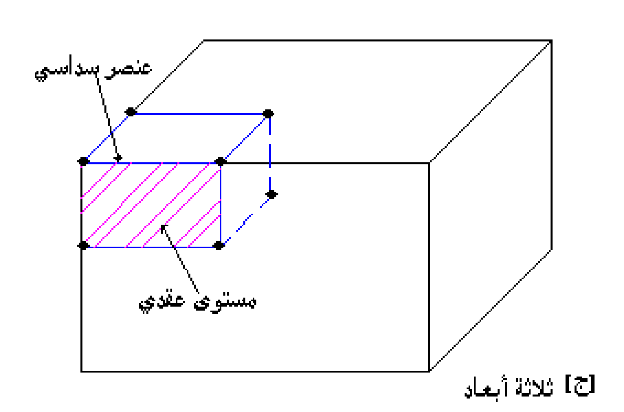
الشكل (1.10) توضيح لطريقة العناصر المحدودة

والخطوات التي تمر بها العملية المذكورة آنفاً هي كما يلي:

1) الفصل (Discretization)

في هذه الخطوة يتم تقسيم نطاق الحل إلى عناصر محدودة وحيث تسمى نقاط تقاطع المستقيمات، التي تكون أضلاع العناصر، بالعقد nodes، كما تسمى الخطوط بالخطوط العقدية (nodal lines) أو بالمستويات. في الشكل (2.10) نوضح العقد والخطوط العقدية في بعد واحد وفي بعدين وفي ثلاثة أبعاد لعدة نطاقات:





الشكل (2.10) العقد والخطوط العقدية في عدة أبعاد

2) معادلات العنصر Element Equations

نكتب معادلات الحل لكل عنصر وذلك كما يلي:

أ) نقوم باختيار دالة مناسبة بمعاملات لاستخدامها كحل تقريبي.

ب) نحسب هذه المعاملات بحيث تكون الدالة ملائمة للحل.

وفي المعتاد يتم استخدام حدوديات من درجة معينة. مثلاً في بعد واحد لو استخدمنا الدالة الملائمة:

$$y(x) = a_o + a_1 x \qquad \text{...... (1.10)}$$

وحيث x هو المتغير المستقل و y المتغير التابع، كما نلاحظ أن $y(x)$ يجب أن تمر بنقطتي نهاية العنصر، أي أن:

$y_1 = a_o + a_1 x_1$ و $y_2 = a_o + a_1 x_2$ [وحيث $y_i = y(x_i), i = 1,2$]. ولمثل هذه الحالة نجد أن:

$$a_o = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{...... (2.10)}$$

و

$$a_o = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{...... (3.10)}$$

وبذلك فإننا نحصل على:

$$y(x) = N_1(x) y_1 + N_2(x) y_2 \qquad \text{...... (4.10)}$$

وحيث:

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \qquad \text{...... (5.10)}$$

و

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{...... (6.10)}$$

وتمثل $y(x)$ دالة التقريب (أو الملائمة)؛ بينما تمثل N_1 و N_2 دالتي الاستكمال.

بعد اختيار الدالة نقوم بحساب أجود ملائمة وذلك بالطرق المعروفة؛ وهذا يقودنا بالتالي إلى معادلات جبرية خطية نكتبها في شكل مصفوفة على الصورة:

$$K \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{F} \qquad ......\ (7.10)$$

وحيث K هي مصفوفة الغلاظة Stiffness matrix وهي ذات علاقة بالعنصر. و $\underset{\sim}{y}$ هي متجه بالمجاهيل عند العقد؛ كما أن $\underset{\sim}{F}$ تمثل المؤثرات الخارجية للمسألة [قوى(دوال مصدر) مثلاً].

3) التجميع (Assembling)

في هذه الخطوة نستعمل مفهوم الاستمرارية للربط بين معادلات العناصر الفردية التي قمنا باشتقاقها وذلك بغية الحصول على التصرف الموحد للمنظومة ككل. نذكر بوجود عقد مشتركة. كما لا ننسى وجود الشروط الحدية والتي يجب وضعها في الحسبان وكذلك استعمال الطرق المختلفة لحل المعادلات الناتجة والتي سبق وأن تعرضنا لها بالتفصيل بالفصل الخامس.

مثال (1.10)

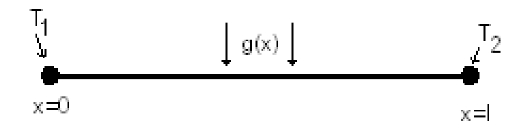
للتبسيط نعطي هنا مثالاً في بعد واحد وذلك عن معادلة بواسون لانتشار الحرارة في بعد واحد:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -g(x)$$

$g(x)$ هي مصدر للحرارة، والانتشار هو على طول قضيب يمتد من $x = 0$ إلى $x = \ell$

ونهاياته محفوظتان عند $T_1 = T(0,t)$ و $T_2 = T(\ell,t)$ $(t \geq 0)$ كما بالشكل (3.10) ؛ هذه المسألة هي مسألة قيم حدية عادية. والمطلوب هو إيجاد $T(x)$.

الآن لو أعطيت القيم $T_1 = 40^o C$, $T_2 = 200^o C$ و $\ell = 10\ cm$ و $g(x) = 10$ فإن الحل يكون كما يلي:



الشكل (3.10) انتشار الحرارة في قضيب طوله ℓ.

نفترض بأن $T(x) = ax^2 + bx + c$ عندئذ نرى أن:

$\frac{d^2T}{dx^2} = 2a$ ومنها نرى أن: $a = -5$

ومن الشروط الحدية نجد أن :

$$c = 40$$

و

$$200 = -5(100) + 10b + 40$$

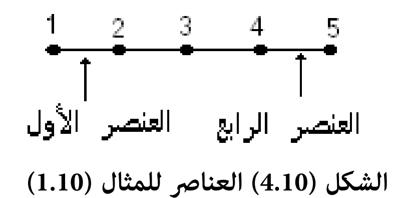
أي أن:

$$b = 66$$

ويكون الحل عندئذ هو :

$$T(x) = -5x^2 + 66x + 40$$

الآن باستخدام طريقة العناصر المحدودة تكون التجزئة البسيطة هي عناصر ذات أطوال متساوية ولتكن من أربع قطع متساوية بخمس عقد كما هو مبين بالشكل (4.10). فمثلاً للعنصر الأول تكون نهايتاه هما العقدتين 1 و 2.



الشكل (4.10) العناصر للمثال (1.10)

نكتب الآن معادلات العناصر الأربع، حيث نقوم بتقريب توزيعة درجة الحرارة بالدالة:

$$\overline{T} = N_1 T_1 + N_2 T_2$$

أي أنه لدينا تقريب خطي بين العقدتين.

نستخدم الطريقة المباشرة للوصول إلى المعادلات المطلوبة، وحيث نلاحظ من بداية المسألة أن العلاقة بين فيض الحرارة (q) وانحدار درجة الحرارة $\left(\frac{dT}{dx}\right)$ هو :

$$q = -k'\left(\frac{dT}{dx}\right)$$

وحيث k' هو معامل التوصيل الحراري. ونرى انه عند العقدة 1 :

$$q = -k'\left(\frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}\right)$$

أما خلال العقدة 2 فإن:

$$q_2 = k'\left(\frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}\right)$$

ويمكن كتابة هذه المعادلات على الصورة:

$$q_2 = k'\left(\frac{dT}{dx}\right)(x_2) \text{ و } q_1 = -k'\left(\frac{dT}{dx}\right)(x_1)$$

ومن هذه المعادلات مجتمعة نستطيع أن نكتب(في صورة مصفوفية):

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{dT}{dx}(x_1) \\ \frac{dT}{dx}(x_2) \end{pmatrix}$$

وتصف هذه المعادلة المصفوفية تصرف عنصر نموذجي للمنظومة تحت الدارسة.

غير أن هذه المعادلة يجب أن تعدل انطلاقا من الشروط الحدية المعطاة وهذا يستوجب القيام بتكاملات معينة نصل من خلالها إلى المعادلة النهائية وهي:

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{dT}{dx}(x_1) \\ \frac{dT}{dx}(x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} g(x) N_1(x) dx \\ \int_{x_1}^{x_2} g(x) N_2(x) dx \end{pmatrix}$$

والحد الأخير يمثل حد التأثيرات الخارجية.

ننوه إلى أن الوصول إلى المعادلة المصفوفية الأخيرة ليس أمراً سهلاً؛ ولكننا قمنا باختزال عدد كبير من الخطوات. والسبب في ذلك هو أننا نعطي هنا فكرة مختصرة جداً

عن طريقة العناصر المحدودة ولا يتسع المجال إلى ذكر التفاصيل. ولمن يهمه الأمر الإطلاع على قائمة المراجع بآخر الكتاب.

الآن لو عدنا للمثال وبالمعطيات الخاصة فإننا نستطيع كتابة المعادلات لكل عنصر وذلك كما يلي:

نأخذ $\Delta x = 2.5\ cm$ لنرى أن :

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\ N_1(x)dx) = \int_0^{2.5} 10\left(\frac{2.5 - x}{2.5}\right)dx = 12.5$$

كذلك نجد أن:

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\ N_2(x)dx) = \int_0^{2.5} 10\left(\frac{x - 0}{2.5}\right)dx = 12.5$$

وهكذا تكون المعادلات هي:

$$0.4T_1 - 0.4T_2 = -\frac{dT}{dx}(x_1) + 12.5$$

و

$$-0.4T_1 + 0.4T_2 = -\frac{dT}{dx}(x_2) + 12.5$$

نقوم بعدئذ بكتابة كل المعادلات المماثلة لبقية العناصر وهي خمسة . وبجمعها، مع الوضع في الاعتبار الشروط الحدية، عندئذ نجد أن:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dx}(x_1) - 0.4T_2 &= -3.5 \\
0.8T_2 - 0.4T_3 &= 41 \\
-0.4T_2 + 0.8T_3 - 0.4T_4 &= 25 \\
-0.4T_3 + 0.8T_4 &= 105 \\
-0.4T_4 - \frac{dT}{dx}(x_5) &= -67.5
\end{aligned}$$

و حل هذه بسيط ويعطي النتائج التالية:

$$\frac{dT}{dx}(0) = 66 \ {}^{o}C/cm$$
$$T_2 = 173.75^{o}C$$
$$T_3 = 245^{o}C$$
$$T_4 = 253.75^{o}C$$
$$\frac{dT}{dx}(10) = -34 \ {}^{o}C/cm$$

2.10 حول تربيعات جاوس

لقد تعرضنا في السابق في البند (3.4)-د إلى طريقة جاوس للتكامل (أو ما نسميها أيضا بتربيعات جاوس)؛ وعموماً وكما ذكرنا حينئذ أن الحل يكمن في تعيين c_i و x_i وحيث $i = 1,......,n$؛ والأمر يؤول إلى حل منظومة معادلات آنية في $c_i's$ و $x_i's$.وفي ذلك نستخدم طريقة معينة مثل طريقة جاوس – سيدل .

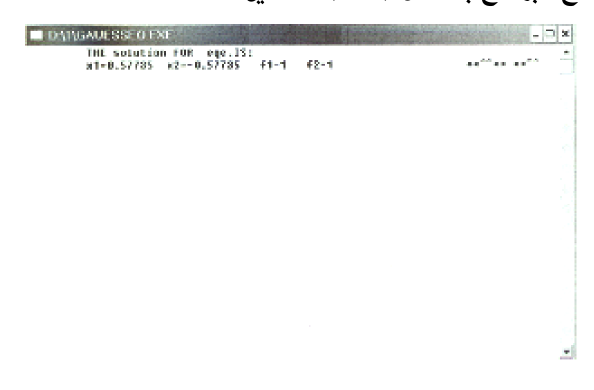
في هذا البند نعطي حسابات حاسوبية لمثل هذه المجاهيل باستخدام طريقة جاوس – سيدل وذلك بلغة C [الشكلان (5.10)-(6.10)]؛ كما نعطي أيضا النتائج في الجدولين (1.10) و (2.10) في حالة استخدام نقطتين وثلاثة نقاط على التوالي. هذا ويمكن للقارئ أن يقوم بالتعميم لعدد أكبر من النقاط؛ غير أنه لابد من التنويه بأنه يجب كتابة المعادلات الآنية أولاً.

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
main(){

float x,y,z,o;
double  X1,X2,f1,f2,k=0.5,kk=0.333;
 int i=0,nn=2,nnn=3 ;
//nn=2;mm=3;
clrscr();
printf("\t THE solution FOR  eqe.IS: \n");
printf("\t\t  **^^** **^^\n\n\n\n");
do{
x=f1;y=f2;z=X1;o=X2;
f1=2-f2;
f2=(-f1*x1)/f2;
X1=(2/3-(f2*( pow( x, nn)))/f1);
 pow(X1,k);
X2=(-(f1*( pow( x, nnn)))/f2) ;
( pow( X2, kk))
;i++;
}while((fabs(f1-x)&&fabs(f2-y)&&fabs(X1-z)&&fabs(X2-o))>10E-5);
printf("i=%d\nrf1=%f\n\rf2=%f\n\rX1=%f\n\rX2=%f",i,f1,f2,X1,X2);
getch();}
```

الشكل (5.10) تربيعات جاوس بلغة C لنقطتين

الجدول (1.10) نتائج البرنامج بالشكل (5.10) لنقطتين.

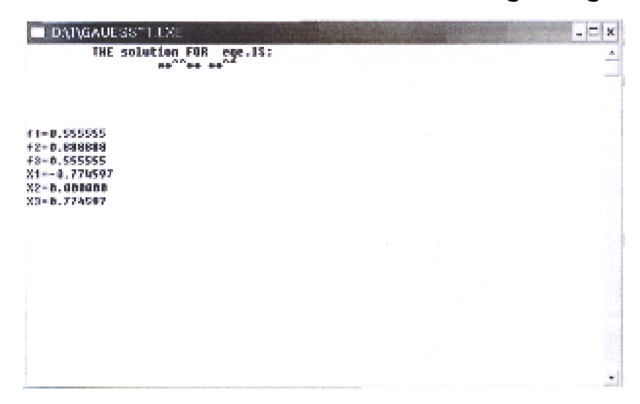


```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
void main(){

float x,y,z,o,d,t;
double  X1,X2,f1,f2,X3,f3,k=0.5,kk=0.333,kkk=0.25,kkkk=0.2;
 int i=0,nn=2,nnn=3,nnnn=4,nnnnn=5 ;
//nn=2;mm=3;
clrscr();
printf("\t THE solution FOR  eqe.IS: \n");
printf("\t\t  **^^** **^^\n\n\n\n");
do{
x=f1;y=f2;z=X1;o=X2;d=f3;t=X3;
f1=2+(-f2-f3);
f2=((-f1*X1)+(-f3*X3))/X2;
f3=(2/3-(f1*(pow( X1,nn)))-(f2*(pow( X2,nn))))/(pow( X3,nn));
//pow(X1,k);pow(X2,k);pow(X3,k);
X1=(-(f2*(pow( X2,nnn)))-(f3*(pow( X2,nnn))))/f1 ;
pow(X1,kk);
X2=(2/5-(f1*(pow( X1,nnnn)))-(f3*(pow( X3,nnnn))))/f2;
pow(X2,kkk);
X3=((-f1*(pow( X1,nnnnn)))-(f2*(pow( X2,nnnnn))))/f3;
 pow(X3,kkkk);
i++;
}while((fabs(f1-x)&&fabs(f2-y)&&fabs(X1-z)&&fabs(X2-o)&&fabs(f3-d)&&fabs(X3-t))>
10E-5);
printf("i=%d\nrf1=%f\n\rf2=%f\n\rf3=%f\n\rX1=%f\n\rX2=%f\nX3=%f\n\r",i,f1,f2,f3,
X1,X2,X3);
;getch();}
```

الشكل (6.10) تربيعات جاوس بلغة C لثلاثة نقاط

الجدول (2.10) نتائج البرنامج بالشكل (6.10) لثلاثة نقاط.



3.10 بعض التوزيعات الإحصائية

المتوسط والانحراف المعياري Mean & Standard Deviation

لكي نعرف ما هو المتوسط وما هو الانحراف المعياري علينا أن ندرس بعض التعريفات أولاً:

تعريف 1

تسمى فئة القياسات اللانهائية لكمية ما بالتعداد الام (Parent Population) كما تسمى فئة قياسات محدودة للكمية بتوزيعة عينة أو بعينة.

كما أن العلاقة التي تربط البارامتر الأم (P.P) (Parent Parameter) والبارامتر التجريبي (E.P) (Experimental Parameter) هي:

$$P.P = \lim_{N\to\infty}(E.P.) \qquad \text{...... (8.10)}$$

تعريف 2

متوسط التعداد الأم (μ) هو عبارة عن نهاية مجموع القياسات x_i للكمية x مقسوماً على عدد القياسات عندما يؤول هذا العدد إلى مالا نهاية.

أي أن:

$$\mu = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum x_i\right) \qquad \text{...... (9.10)}$$

وهكذا نلاحظ أن المتوسط هو مثابة مركز هذه القيم أو القياسات (لاحظ الفرق

بين المتوسط والوسيط ($\mu_{1/2}$) والذي يمثل القيمة عند منتصف العدد N من القياسات ؛ أي أن نصف القياسات تأتي قبله ونصفها بعده).

تعريف 3

يمثل الانحراف للقيمة x_i من المتوسط بالفرق بين القيمة x_i والمتوسط μ أي أن $d_i = x_i - \mu$.

لاحظ أن متوسط الانحراف في كل القيم يساوي الصفر.

حيث أن:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum(x_i - \mu)\right) = \lim\frac{1}{N}\sum x_i - \mu = \mu - \mu = 0$$

تعريف 4

تسمى نهاية متوسط مربعات الانحرافات من المتوسط μ بالاختلاف (أو التغاير) σ^2 (Variance) أي أن:

$$\sigma^2 = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum(x_i - \mu)^2\right]$$

تعريف 5

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للاختلاف أي أن:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

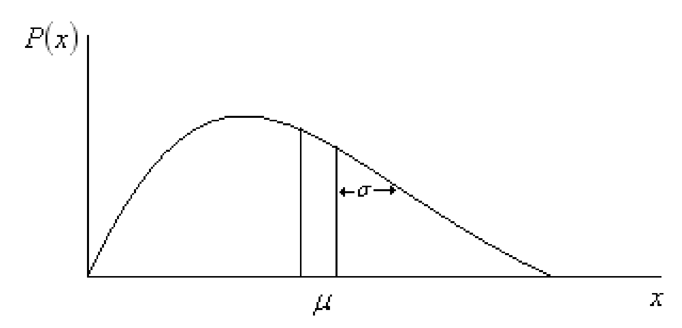
نلاحظ أن μ و $\mu_{1/2}$ تمثل أكثر القيم المحتملة. كما أن μ هو أحد البارامترات

التي تعين التوزيعة الاحتمالية (Probability Distribution). كما أنها تحمل نفس الوحدات مثل القيمة الحقيقية للكمية المقاسة (True Value).

أما σ و σ^2 فهي تختص بمقدار عدم التأكد (uncertainty) اللصيق بالمحاولات التجريبية لتعيين القيمة الحقيقية أو بصورة أخرى يكون الانحراف المعياري مقياسا مناسبا لعدم التأكد في ملاحظاتنا نتيجة للتقلبات (أو الاضطرابات) (fluctuations).

ولو نظرنا للشكل (7.10) والذي يمثل العلاقة بين الاحتمالية $P(x)$ والكمية x لتبينا معاني كل من المتوسط والوسيط والانحراف المعياري.

وبصدد ذكر التوزيعات الاحتمالية فإننا نود الذكر بأنه توجد توزيعات منفصلة (Discrete) وتوزيعات مستمرة؛ وأن القيمة المتوقعة لأي بارامتر $f(x)$ تعرف على أنها:



الشكل (7.10) توضيح للمتوسط والوسيط والانحراف المعياري

$$\langle f(x)\rangle = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum f(x)\right] = \sum f(x_i)P(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)P(x)dx$$

ويمكننا مرة أخرى اعتبار البارامترين الأساسيين في أي عينة على أنهما:

المتوسط: $\mu = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i$

و

الاختلاف : $\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)$

وحيث نرى هنا أننا قسمنا على $N-1$ بدلا من N والتي تدل الآن على عدد درجات الحرية؛ فبتعيين $\bar{x}$ نقصت درجات الحرية من N إلى $N-1$.

وهذا ما سبق وأن تطرقنا إليه في فصل سابق.

وهكذا لو تم تعيين $\bar{x}$ و σ^2 فإنه لتعيين أي بارامتر آخر (ثالث) للعينة نقسم على $N-2$.و عموماً لو كانت البارامترات المعينة m وعدد القياسات N فإنه لتعيين البارامتر رقم $m+1$ نقسم على $N-m$

بعض التوزيعات الاحتمالية

1. التوزيعة ذات الحدين

وهي تصف احتمال ملاحظة r من المحاولات الناجحة في n منها وذلك عندما تكون احتمالية النجاح في كل محاولة تساوي p .

$$P_B\left(r,n,p\right) = {}^nC_r\, p\, q^{n-r} = \frac{n!}{r!\left(n-r\right)!}\, p^r\left(1-p\right)^{n-r}$$

كما أن:

$$q = 1-p$$
$$\mu = np$$
$$\sigma^2 = np\left(1-p\right)$$

2. توزيعة بواسون

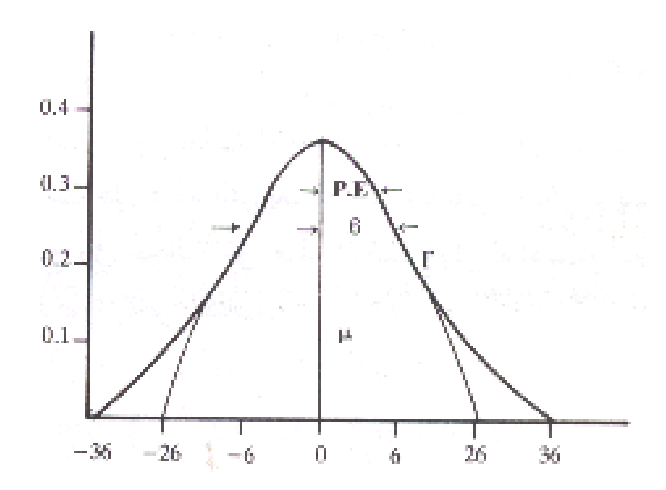
وتصلح هذه لوصف العينات الصغيرة من تعدادات ضخمة كما أنها تعتبر حالة خاصة من التوزيعة ذات الحدين عندما تكون n كبيرة و μ ثابتة:

$$P_p(x,\mu)=\frac{\mu^2}{x!}e^{-\mu}$$

3.التوزيعة الجاوسية

تعتبر هذه أيضاً حالة خاصة من التوزيعة ذات الحدين وذلك لـ n كبيرة و p محدودة .. كما أنها تناسب التوزيعة المتناسقة السلسة.

$$P_G(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$



الشكل (8.10) التوزيعة الجاوسية

والشكل (8.10) يوضح هذه التوزيعة حيث نلاحظ أن المحور الأفقي يمثل $x-\mu$ وأن نصف العرض $\Gamma = 2.3456$ والخطأ المحتمل $P.E. = 0.62456$.

والعرض الكلى هو العرض عند نصف القيمة العظمى. كما أن الخطأ المحتمل هو القيمة المطلقة للانحراف $x-\mu$ بحيث يكون احتمال الانحراف لأي ملاحظة عشوائية $|x_i-\mu|$ أقل من أو يساوي النصف.

والتوزيعة الجاوسية مناسبة جداً وذلك من خلال التجارب المختلفة التي تم تطبيق التوزيعة عليها؛ و تسمى أيضا بالتوزيعة الطبيعية.

4.التوزيعة اللورانترية

هذه التوزيعة تصلح لوصف بيانات فيزياء نووية، حيث يتم استخدامها عند التصرف الرنيني Resonance Behavior، وذلك ما يحدث عادة في حالة التغير في القطاع العرضي للتفاعلات النووية نسبة للطاقة أو من خلال التغير فيه بالنسبة لسرعة امتصاص الإشعاع كما يحدث بظاهرة موسبار وتوصف التوزيعة اللورانترية على الشكل:

$$P_L(x,\mu,\Gamma)=\frac{1}{\pi}\frac{\Gamma/2}{(x-\mu)^2+\Gamma^2/4}$$

إن الحديث حول هذه التوزيعات وغيرها يطول ولكن لم يكن بوسعنا هنا سوى التعريج وفي عجالة على هذا الموضوع ولمن له اهتمام أكبر به أن يرجع للمراجع المذكورة بآخر الكتاب .

تمارين (10)

1. قم بكتابة تفاصيل المثال (1.10).
2. أكتب برنامجا حاسوبيا يحسب معاملات و إحداثيات تربيعيات جاوس لعدد 4،5،6 نقاط و قارن بما جاء بالفصل الرابع.طبق ما توصلت إليه من نتائج على أمثلة من عندك و سجل ملاحظاتك.
3. ((لا فرق بين المتوسط و الوسيط)) ما مدى صحة هذه العبارة ؟
4. ما هي العلاقة بين الاختلاف والانحراف المعياري؟
5. قم باشتقاق صيغ μ و σ^2 للتوزيعة ذات الحدين.
6. من خلال تمحيصك بالتوزيعتين الجاوسية واللورانتزية؟ هل يمكنك اكتشاف الفرق بينهما؟
7. اضرب بعض الأمثلة على المجالات التي يمكن تطبيق التوزيعة اللورانتزية بها.

معجم الكتاب

الكلمة		المعنى
	A	
Approximation		تقريب
	B	
Behavior		تصرف
Binomial		ذات الحدين
Boundary		حد (أو حدي)
	C	
Coefficient		معامل
Computed		محسوب
Computer		حاسوب
Condition		شرط
Consistency		عدم تناقض
Correction		تصحيح
Corrector		مصحح
Curve		منحنى

D

Data	بيانات
Deviation	انحراف
Diagonal	قطري
Difference	فرق
Differential	تفاضلي
Discrete	منفصل
Distribution	توزيعة

E

Edge	حافة
Eigenvalue	قيمة ذاتية
Eigenvector	متجه ذاتي
Elliptic	ناقصي
Equation	معادلة
Error	خطأ
Expected	متوقع
Exponential	أسي
Experimental	تجريبي
Explicit	صريح
Extended	ممتد (أو امتداد)

F

Figure	شكل
Finite	محدود، منته
Fitting	ملائمة
Flow	تدفق
Fluctuation	تقلبات، اضطرابات
Function	دالة

G

Geometric	هندسي
Gauss Quadrature	تربيع جاوس

H

Heat	حرارة
Hyperbolic	زائدي

I

Implicit	ضمني
Initial	ابتدائي
Instability	عدم اتزان
Interval	فترة

K

Kind	نوع

L

Least Squares	مربعات صغرى
Linear	خطي

M

Matrix	مصفوفة
Maximum	قيمة عظمى
Mean	متوسط
Median	وسيط
Method	طريقة
Minimum	قيمة صغرى
Modified	معدل
More	أكثر
Multiple	متعدد

N

Necessary	ضروري
Normalized	معمد، عياري
Numerical	عددي

O

Off-diagonal	غير قطري

Operator	مؤثر
Ordinary	عادي

P

Parabolic	مكافئي
Partial	جزئي
Polynomial	حدودية
Popular	شعبي
Potential	جهد
Predictor	منبئ
Probability	احتمال
Problem	مسألة
Program	برنامج

Q

Quadratic	تربيعي

R

Real	حقيقي
Rectangle	مستطيل
Region	منطقة
Regression	انكفاء

Relative	نسبي
Resonance	رنين
S	
Shooting	رمي
Side	جانب
Single	مفرد
Smooth	سلس
Squares	مربعات
Stability	اتزان
Standard	عياري،نموذجي
State	حالة
Solution	حل
Solve	يحل
Sufficient	كافي
Subinterval	فترة فرعية
Subroutine	بريمج، برنامج فرعي
Symmetric	متناسق،متماثل
T	
Table	جدول

Transformation	تحويلة
Trigonometric	مثلثي
True	حقيقي

U

Uncertainty	عدم تأكد، ريبة
Unique	وحيد
Uniqueness	أحادية
Unsteady	غير مستقر

V

Value	قيمة
Variance	اختلاف، تغاير
Vector	متجه

W

Width	عرض

Z

Zero	الصفر

المراجع

1. الطرق العددية في الفيزياء- علي محمد.عوين،1988، منشورات مركز البحوث النووية - تاجوراء.
2. مقدمة في التحليل العددي - علي محمد عوين، 1986، منشورات جامعة الفاتح - طرابلس.
3. مقدمة في التحليل العددي - بيتر.ستارك، 1970، ماكميلان للنشر- نيويورك.
4. التحليل العددي التطبيقي - جرالد و ويتلي.
5. تطبيقات الحاسب الآلي بالطرق العددية - شان كيو، 1972، ايدسون ويزلي - نيويورك.
6. الطرق العددية وحالات دراسية بالفورتران - و.دورن، ود.ماك كراكن ، 1972، جون ويلي وأولاده - نيويورك.
7. اختزال المعلومات وتحليل الخطأ للعلوم الفيزيائية - ف. بيفنجتن ، 1969، ماك جروهيل - نيويورك.
8. مدخل في البرمجة على الحاسب الآلي-علي محمد عوين وعثمان علي عوين،2001، إلجا - مالطا.

المحتويـــات

الموضوع		الصفحة